

Crédit photo : H. Bonnard / P'

Simulation Numérique du Sloshing à l'aide d'une Méthode Eléments Finis Bifluide.

Two-phase Flow Simulation of Sloshing, by Finite Element Method.

L.SALOMON⁽¹⁾, P.M.GUILCHER⁽¹⁾

leila.salomon@ensta-bretagne.org ; pierre-michel.guilcher@ensta-bretagne.fr

⁽¹⁾Institut de Recherche Dupuy de Lôme, Brest

Résumé

Cette étude présente les résultats numériques d'un cas de sloshing obtenus par un code de calcul spécialement développé pour la simulation d'écoulements à surface libre. Les écoulements traités sont de type bifluide, à phases incompressibles et non-visqueuses. La méthode Level-Set (méthode des Lignes de Niveau) est utilisée pour capturer la surface libre de façon implicite. L'outil numérique se base sur une formulation Eléments Finis afin de discrétiser le jeu d'équations, et autoriser l'utilisation de schémas numériques robustes et d'ordres élevés. Les résultats numériques issus de différents cas de sloshing ont permis de valider l'outil numérique tout en confirmant la puissance de la méthode. La montée en ordre spatial a permis aux résultats de converger plus rapidement vers les solutions de référence.

Summary

This study presents the numerical results of a sloshing case obtained by a computational code specially developed for the simulation of free surface flows. We focused on an incompressible and inviscid two-phase flow. The Level-Set method has been used to capture the free surface. This code used a Finite Element formulation in order to discretize the set of equations and to authorize robust and high-order numerical schemes. Numerical results provided by different cases of sloshing validated the solver, confirming the power of this method. Using this method, we observed that increasing spatial order allows the solutions to converge more fastly to the reference values.

I – Introduction

La simulation numérique des écoulements à surface libre est d'un grand intérêt, en complément des essais, pour analyser les problèmes rencontrés en hydrodynamique navale, et finalement dimensionner correctement les structures navales. Le ballotement de fluides dans un réservoir et le comportement d'un navire sur houle en constituent quelques exemples.

Dans cette étude, on s'intéresse au problème de ballotement dans une cuve. Chaque fluide est considéré incompressible et non-visqueux, le modèle mathématique se réduisant alors aux équations d'Euler. Il existe une variété de méthodes numériques, consacrées à la discrétisation spatiale des EDP (Equations aux Dérivées Partielles). C'est actuellement la Méthode Volumes Finis qui est la plus utilisée dans les codes de CFD (Computational Fluid Dynamics). Cependant, elle a le principal inconvénient d'être limitée sur le choix de l'ordre spatial, qui reste généralement inférieur à deux. A l'inverse, la Méthode des Eléments Finis (MEF) est facilement implémentable aux ordres élevés. Pendant longtemps, cette méthode présentait des instabilités numériques pour la résolution des problèmes physiques dominés par la convection. Néanmoins, depuis quelques années, le recours à des méthodes de décentrement issues de la communauté des Volumes Finis rend possible la simulation d'écoulements à surface libre. La Méthode des Eléments Finis est retenue dans cette étude, afin d'utiliser des ordres spatial et temporel élevés.

Le traitement de la surface libre nécessite l'utilisation d'une méthode particulière. Deux méthodes sont principalement utilisées dans la littérature, pour traiter les écoulements complexes avec fragmentation et reconnection de l'interface. La première, connue sous le nom de Volume-Of-Fluid (VOF), consiste à déterminer la fraction volumique d'un des fluides dans chaque volume de contrôle, et est apparue en 1981 avec *Hirt et Nichols* [5]. La seconde, nommée méthode Level-Set (LS), est introduite plus tard en 1988 par *S. Osher et J. Sethian* [10] et désigne la surface libre comme étant le niveau zéro d'une fonction distance signée. Contrairement à la méthode VOF, cette dernière est facilement applicable aux ordres élevés et représente la surface libre de façon continue, ce qui a conduit à retenir cette solution dans ce travail.

Dans la première section de ce papier, la méthode choisie pour le couplage Level-Set/MEF sera expliquée. Dans la deuxième et troisième sections, les discrétisations spatiale et temporelle seront détaillées pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Dans la quatrième section, les résultats numériques issus d'un cas de sloshing seront présentés afin de valider l'outil numérique. Enfin, les remarques et conclusions seront résumées dans la dernière section.

II – Méthodologie

II – 1 Méthode des Eléments Finis

De la même façon que la Méthode des Volumes Finis, le formalisme Eléments Finis utilise des approximations intégrales. La MEF résout cependant une formulation faible des équations de l'écoulement, en introduisant la notion de fonction test définie sur un espace fonctionnel. Le domaine de calcul est discrétisé en plusieurs éléments où la solution est recherchée sur leurs degrés de liberté. La solution est finalement approchée sous forme

polynomiale dans chaque élément, l'ordre du schéma spatial impose le degré des polynômes (voir Fig. 1).

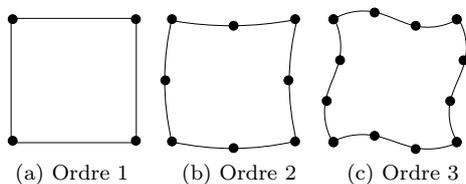


FIGURE 1 – Solution dans l'élément : (a) Linéaire (b) Quadratique (c) Cubique.

Le formalisme Galerkin est classiquement utilisé en Eléments Finis. Il se base sur des approximations polynomiales de type Lagrange, assurant la continuité de la solution d'un élément à un autre.

II – 2 Modélisation de la surface libre

La méthode Level-Set désigne la surface libre η comme étant le niveau zéro d'une fonction distance signée, notée $\chi(\mathbf{x}, t)$. \mathbf{x} représente l'espace en une, deux ou trois dimensions. En d'autres termes, à l'instant t :

$$\eta(t) = \{\mathbf{x} \text{ tel que } \chi(\mathbf{x}, t) = 0\} \quad (1)$$

La fonction Level-Set représente une variété d'iso-contours situés à une certaine distance de la surface libre. Cette fonction est positive dans un fluide (Ω_1) et négative dans l'autre (Ω_2) :

$$\chi(\mathbf{x}, t) \begin{cases} > 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ = 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \eta \\ < 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (2)$$

L'évolution de la surface libre est effectuée implicitement par l'équation d'advection suivante :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \chi = 0 \quad (3)$$

La résolution de l'équation de transport (3) est connue pour présenter des instabilités numériques lorsque le schéma utilisé est centré, ce qui est le cas en Eléments Finis pour le formalisme Galerkin. Pour assurer la stabilité du schéma, un formalisme Galerkin Discontinu (GD) est utilisé dans ce travail. Cette méthode devient populaire en 1999 grâce aux travaux de *Cockburn et Shu* [2][4], où les auteurs travaillent sur la résolution des problèmes spatio-temporels. La méthode GD utilisée dans ce travail ajoute au schéma Galerkin un flux numérique de type upwind (amont), agissant selon le sens de l'écoulement et défini sur les faces des éléments du maillage. A l'inverse du schéma classique de Galerkin, les solutions sont discontinues d'un élément à un autre.

La fonction Level-Set χ est connue pour perdre son caractère de fonction distance signée lorsqu'elle est advectée par le champ de vitesse de l'écoulement. Pour remédier à ce problème, il est nécessaire d'avoir recours à des techniques particulières de redistanciation. La méthode utilisée dans ce travail consiste dans un premier temps à discrétiser la surface libre en recherchant les valeurs $\chi = 0$. La distance entre les nœuds du maillage et cette surface libre discrétisée est ensuite recalculée.

II – 3 Modélisation de l’écoulement

L’écoulement est supposé composé de deux fluides non-visqueux et incompressibles. Pour chaque fluide, les équations d’Euler s’écrivent en appliquant la relation de conservation à la masse et à la quantité de mouvement :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (5)$$

Dans les équations ci-dessus, t désigne le temps, ∇ l’opérateur gradient, \mathbf{u} la vitesse, p la pression, ρ la masse volumique et \mathbf{g} l’accélération de pesanteur. Pour les écoulements bifluïdes, chaque fluide est caractérisé par sa masse volumique qui devient donc discontinue en traversant l’interface. La méthode Level-Set utilisée dans cette étude permet de définir des valeurs globales pour les propriétés du fluide :

$$\rho(\chi) = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)H(\chi) \quad (6)$$

Avec $H(\chi)$ la fonction de Heaviside ($H(\chi) = 1$ si $\chi > 0$ et $H(\chi) = 0$ si $\chi < 0$). Pour éviter la discontinuité de ρ au travers de l’interface, une fonction lissée approxime numériquement la fonction de Heaviside :

$$H(\chi) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{\chi}{2\epsilon} \right) \right) \quad (7)$$

L’équation (7) présentée ci-dessus est utilisée dans les travaux de *Zhao et al.* [11] pour définir une représentation globale de la masse volumique et de la viscosité. La surface libre est épaissie fictivement et sa largeur est contrôlée par le paramètre spatial ϵ . La masse volumique globale (6) est remplacée dans l’équation de conservation de la quantité de mouvement (CQDM)(5). En définitive, un seul système d’équations est résolu pour simuler le mouvement de deux fluides. Cette méthode est simple à mettre en oeuvre, cependant, le lissage de la fonction $H(\chi)$ est connu pour conduire à la formation de courants parasites autour de la surface libre.

La résolution du système (4),(5) fait face à deux difficultés numériques. La première concerne la résolution de l’équation CQDM qui devient instable lorsque les termes advectifs sont prédominants. Par analogie à l’équation de transport (3), une méthode Galerkin Discontinu est utilisée pour résoudre l’équation (5). La deuxième difficulté numérique se trouve être la discrétisation des termes de pression et de vitesse. Pour assurer la stabilité du schéma numérique, une condition de Babuska-Brezzi [1] doit être assurée pour résoudre les équations de l’écoulement en MEF. Pour cela, il est nécessaire d’utiliser des éléments finis stabilisés où les espaces de pression et de vitesse sont correctement choisis. Pour circonvenir la condition, un algorithme de projection est utilisé dans ce travail. Ces méthodes, initialement introduites par *Chorin* [3] et utilisées dans les travaux [11],[6], reposent sur la décomposition de Hodge de tout champ vectoriel en la somme d’un champ vectoriel à divergence nulle et d’un champ vectoriel dérivant d’un potentiel, ce qui permet de résoudre de façon découplée la vitesse et la pression. Dans la version explicite de *Chorin*, la décomposition de Hodge est appliquée sur la vitesse, ce qui limite le choix de l’avance temporelle à la méthode Euler explicite. Pour éviter d’être limité au premier ordre sur le schéma temporel, nous décidons d’appliquer la décomposition de Hodge sur la dérivée temporelle de la vitesse.

A l'instant initial, le champ de vitesse est connu et vérifie bien la condition d'incompressibilité (4), la divergence du champ de vitesse est donc supposée nulle à l'instant n et $(n + 1)$:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} \right) = 0 \quad (8)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est écrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{\nabla p^n}{\rho(\chi)} - \mathbf{g} = 0 \quad (9)$$

La première étape ici consiste à déterminer une dérivée temporelle intermédiaire, où le gradient de pression est omis :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^* + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \mathbf{g} = 0 \quad (10)$$

L'étape de soustraction (9)-(10) est réalisée afin d'obtenir :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^* = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\nabla p^n}{\rho(\chi)} \quad (11)$$

On retrouve bien la décomposition du champ $(\partial \mathbf{u} / \partial t)^*$ en une composante à divergence nulle ($\nabla \cdot (\partial \mathbf{u} / \partial t) = 0$) et une composante dérivant du potentiel scalaire p^n . En appliquant l'opérateur de divergence à cette décomposition, on obtient une équation de Poisson anisotropique sur la pression :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^n}{\rho(\chi)} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^* \quad (12)$$

Après résolution de ce système linéaire, l'inconnue p^n est déterminée dans l'ensemble du domaine et la dérivée temporelle $(\partial \mathbf{u} / \partial t)$ est finalement calculée selon la décomposition (11). A cette étape, il est possible de choisir le schéma temporel explicite afin de déterminer la solution \mathbf{u}^{n+1} .

III – Discrétisations Eléments Finis

III – 1 Discrétisation de l'équation de transport Level-Set

La simulation d'écoulements incompressibles contraint une vitesse à divergence nulle, l'équation de transport (3) peut alors être réécrite sous sa forme conservative :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \chi) = 0 \quad (13)$$

La méthode des Eléments Finis consiste à intégrer, dans le domaine Ω , la fonction χ multipliée par une fonction test qui est notée $w(\mathbf{x})$. Le théorème de Green est ensuite appliqué au terme de divergence pour obtenir la formulation faible de l'équation (13) :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial t} w = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{u} \chi - \int_{\partial \Omega} \chi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) w \quad (14)$$

Notons E un élément appartenant à l'ensemble des éléments \mathcal{E}_h constituant le maillage. Sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_h$, les fonctions tests et les solutions sont approchées par des fonctions polynomiales d'ordre $k \geq 0$, continues sur chaque élément mais discontinues d'un

élément à un autre (formalisme Galerkin Discontinu). Dans ce cas, l'espace approché de la solution χ est le suivant :

$$W_h^s = \{\chi_h \in L^2(\Omega); \chi_h|_E \in P_k(E), \forall E \in \mathcal{E}_h\} \quad (15)$$

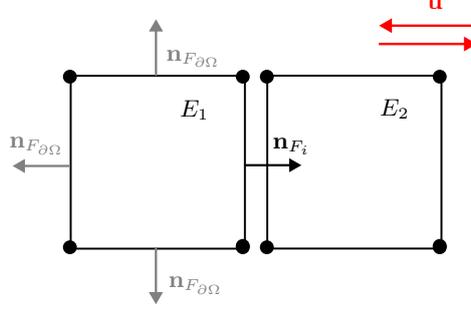


FIGURE 2 – Séparation de deux éléments discontinus.

Le problème discret peut être formulé localement dans un élément E sous la forme suivante :

$$\int_E \frac{\partial \chi_h}{\partial t} w_h = \int_E (\mathbf{u} \cdot \nabla w_h) \chi_h - \sum_F \int_{F \in \partial E} \Phi(\chi_h, \omega_h) \quad \forall w_h \in W_h^s \quad (16)$$

La notation F désigne une face d'un élément appartenant à l'ensemble des faces \mathcal{F}_h du maillage. Elle est notée F_i si elle sépare deux éléments et $F_{\partial\Omega}$ si elle appartient au bord du domaine. Le terme $\Phi(\chi_h, \omega_h)$ pour un élément E s'écrit alors :

$$\Phi(\chi_h, \omega_h) = \begin{cases} \chi_h(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{F_{\partial\Omega}}) \omega_h & \text{si } F \in F_{\partial\Omega} \\ \chi_{UP}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{F_i}) \omega_h & \text{si } F \in F_i \end{cases} \quad (17)$$

La formulation Galerkin Discontinu utilisée dans ce travail remplace le flux imposé initialement sur les faces \mathcal{F}_h par un flux numérique $\Phi(\chi_h, \omega_h)$ de type upwind. Dans le contexte de cette étude, nous supposons le domaine fermé par des parois fixes, les termes de bord sont donc nuls, du fait de la condition limite de non-pénétration du fluide. La formulation mathématique retenue pour définir le flux upwind est issue des travaux [8][7][6] :

$$\Phi(\chi_h, \omega_h) = \{\chi_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F\}^* [[\omega_h]] \quad \text{avec : } \{\chi_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F\}^* = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F) \{\chi_h\} + \frac{1}{2} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F| [[\chi_h]] \quad (18)$$

$\{\}$ et $[[\]]$ désignent respectivement la moyenne et le saut :

$$\{\chi\} = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \quad \text{et} \quad [[\chi]] = \chi_1 - \chi_2 \quad (19)$$

Selon le sens de l'écoulement, le flux numérique est défini de la façon suivante :

$$\Phi(\chi_h, \omega_h) = \begin{cases} \chi_1(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F)(\omega_1 - \omega_2) & \text{si } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F) > 0 \\ -\chi_2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F)(\omega_1 - \omega_2) & \text{si } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F) < 0 \end{cases} \quad (20)$$

Il s'agit simplement de la généralisation de la notion de décentrement upwind, classique en Méthode des Volumes Finis. On rappelle que les solutions χ et les fonctions tests sont approchées sous formes polynomiales dans chaque élément, elles peuvent être décomposées sous formes vectorielles :

$$\chi_h(\mathbf{x}) = \{N_i^X(\mathbf{x})\}^T \{\chi_i\} \quad \text{et} \quad w_h(\mathbf{x}) = \{N_j^X(\mathbf{x})\} \{\omega_j\}^T \quad (21)$$

Les vecteurs $\{N_i^X\}^T (i = 1, \dots, n)$ et $\{N_j^X\} (j = 1, \dots, n)$, avec n le nombre de degrés de liberté des éléments, désignent les fonctions de forme. Les vecteurs $\{\chi_i\} (i = 1, \dots, n)$ et $\{\omega_j\}^T (j = 1, \dots, n)$ désignent les valeurs nodales à déterminer. On substitue désormais dans la formulation approchée (16) le développement (21). Le problème approché peut alors s'écrire :

$$M \frac{d}{dt} \{\chi\} = T \{\chi\} \quad (22)$$

Avec $\{\chi\}$ le vecteur des valeurs nodales et M, T les matrices de masse et de transport dont les i, j -ièmes éléments sont donnés par :

$$M_{ij} = \int_{\Omega} N_i^X N_j^X \quad \text{et} \quad T_{ij} = \int_{\Omega} N_i^X (\mathbf{u} \cdot \nabla N_j^X) - \sum_F \int_{F \in \mathcal{F}_h} \{N_i^X \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F\}^* [[N_j^X]] \quad (23)$$

III – 2 Discrétisation des équations régissant l'écoulement

Selon la méthode de projection utilisée dans ce travail, l'équation (5) se décompose en deux étapes : $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t}$, avec :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho(\chi)} \quad (25)$$

Pour simplifier la notation ici, les dérivées temporelles $\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t}$ et $\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t}$ s'écriront respectivement $\mathbf{u}_{1,t}$ et $\mathbf{u}_{2,t}$. L'équation de Poisson anisotropique (12) est réécrite sous la forme suivante :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{\rho(\chi)} \right) = \nabla \cdot \mathbf{u}_{1,t} \quad (26)$$

III – 2.1 Terme de convection

L'équation (24) est d'abord résolue composante par composante :

$$\mathbf{u}_{1,t} = \begin{pmatrix} u_{1,t} \\ v_{1,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{u} \cdot \nabla u \\ -\mathbf{u} \cdot \nabla v - g \end{pmatrix} \quad (27)$$

Pour E un élément appartenant à \mathcal{E}_h , l'espace approché des composantes $u_{1,t}$ et $v_{1,t}$ est identique à celui des fonctions χ (espace (15)). Les équations de transport des composantes de vitesse sont écrites sous forme convective ici, à l'inverse de l'équation de transport Level-Set qui est sous forme conservative. La contribution GD appliquée sur les faces des éléments s'écrit ici avec un terme supplémentaire venant de l'intégration par partie des termes advectifs. La discrétisation de la formulation faible de l'équation (24) s'écrit alors, pour la première composante de $\mathbf{u}_{1,t}$ dans l'élément E :

$$\int_E u_{1h,t} w_h = - \int_E (\mathbf{u} \cdot \nabla u_h) w_h - \sum_F \int_F \{w_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F\}^* [[u_h]] \quad \forall w_h \in W_h^s \quad (28)$$

avec :

$$\{w_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F\}^* = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F) \{w_h\} + \frac{1}{2} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F| [[w_h]] \quad (29)$$

Le problème approché ici s'écrit :

$$M\{u_{1,t}\} = T\{u\} \quad (30)$$

avec :

$$M_{ij} = \int_{\Omega} N_i^u N_j^u \quad \text{et} \quad T_{ij} = - \int_{\Omega} N_j^u (\mathbf{u} \cdot \nabla N_i^u) - \sum_F \int_{F \in \mathcal{F}_h} \{N_j^u \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F\}^* [[N_i^u]] \quad (31)$$

La composante $v_{1,t}$ est résolue de la même manière en ajoutant le terme de gravité. L'approche s'écrit maintenant sous sa forme vectorielle :

$$\mathbf{M}\{\mathbf{u}_{1,t}\} = \mathbf{T}\{\mathbf{u}\} + \mathbf{g} \quad (32)$$

Le terme \mathbf{g} désigne ici un vecteur source représentant la gravité. L'espace vectoriel approché de la solution $\mathbf{u}_{1h,t}$ est noté :

$$W_h^{\mathbf{v}} = \{\mathbf{u}_{1h,t} \in (L^2(\Omega))^2; \mathbf{u}_{1h,t}|_E \in (P_k(E))^2, \forall E \in \mathcal{E}_h\} \quad (33)$$

III – 2.2 Terme de pression

L'équation de pression (26) est maintenant résolue. Pour chaque élément $E \in \mathcal{E}_h$, les fonctions tests et la solution p sont approximées par des fonctions polynomiales d'ordre $k \geq 0$, continues sur chaque élément et d'un élément à un autre. Le recours à une formulation de type Galerkin s'impose car la formulation faible du problème de pression ne fait pas intervenir d'advection. L'espace approché ici s'écrit :

$$W_h^p = \{p_h \in H^1(\Omega); p_h|_E \in P_k(E), \forall E \in \mathcal{E}_h\} \quad (34)$$

La formulation faible (approximation de Galerkin) de l'équation (26) s'écrit :

$$- \int_{\Omega} \nabla \omega_h \cdot \frac{\nabla p_h}{\rho(\chi)} + \int_{\partial\Omega} \omega_h \left(\frac{\nabla p_h}{\rho(\chi)} \cdot \mathbf{n} \right) = \int_{\Omega} \omega_h \nabla \cdot \mathbf{u}_{1,t} \quad \forall \omega_h \in W_h^p \quad (35)$$

$\mathbf{u}_{1,t}$ est calculée au préalable dans l'espace discontinu W_h^s , une étape de projection est alors nécessaire pour obtenir la solution dans l'espace W_h^p . Le problème approché peut s'écrire :

$$A\{p\} = B \quad (36)$$

avec :

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho(\chi)} \nabla N_i^p \cdot \nabla N_j^p \quad \text{et} \quad B_j = - \int_{\Omega} N_j^p \nabla \cdot \mathbf{u}_{1,t} + \int_{\partial\Omega} N_j^p \left(\frac{\nabla p}{\rho(\chi)} \cdot \mathbf{n} \right)_{cn} \quad (37)$$

Le terme $\left(\frac{\nabla p}{\rho(\chi)} \cdot \mathbf{n} \right)$ dans B_j désigne une condition de Neumann. L'utilisation seule de ce type de conditions limites aux bords conduit à une solution de pression définie à une constante près (éventuellement dépendante du temps). Il est nécessaire de fixer cette constante, et la solution retenue dans ce travail consiste à imposer une valeur de pression en un point du domaine. La pression étant désormais connue dans Ω , $\mathbf{u}_{2,t}$ peut alors être résolue. L'espace approché de cette solution est identique à celui de $\mathbf{u}_{1,t}$ (espace (33)). La formulation faible de l'équation (25) peut s'écrire :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_{2h,t} \cdot \mathbf{w}_h = - \int_{\Omega} \frac{\nabla p_h}{\rho(\chi)} \cdot \mathbf{w}_h \quad \forall \mathbf{w}_h \in W_h^{\mathbf{v}} \quad (38)$$

Le problème approché s'obtient sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}\{\mathbf{u}_{2,t}\} = \mathbf{G}\{p\} \quad (39)$$

Avec \mathbf{M} la matrice masse, identique à celle utilisée dans le problème (32), et \mathbf{G} la matrice gradient :

$$\mathbf{G}_{ij} = - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho(\chi)} N_j^y \nabla N_i^p \quad (40)$$

III – 2.3 Champ de vitesse

La dernière étape consiste à déterminer le champ de vitesse dans Ω selon la décomposition suivante : $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u}_{1,t} + \mathbf{u}_{2,t}$:

$$\frac{d}{dt}\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}_{1,t}\} + \{\mathbf{u}_{2,t}\} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{T}\{\mathbf{u}\} + \mathbf{g}) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}\{p\} \quad (41)$$

$$\mathbf{M} \frac{d}{dt}\{\mathbf{u}\} = \mathbf{T}\{\mathbf{u}\} + \mathbf{g} + \mathbf{G}\{p\} \quad (42)$$

La dérivée partielle par rapport au temps dans l'équation ci-dessus devient une dérivée totale, car les noeuds du maillage restent fixes. La formulation finalement utilisée est de type mixte, car elle fait intervenir des espaces fonctionnels différents pour la vitesse et la pression.

IV – Résolution temporelle

Cette étude est basée sur l'utilisation d'avances temporelles explicites (Euler Explicite, Runge-Kutta 2 du point milieu, Runge-Kutta troisième ordre, quatrième ordre, etc.) afin d'obtenir les solutions χ et \mathbf{u} au pas de temps suivant. Certains auteurs [6] s'appuient sur un schéma d'intégration temporelle implicite-explicite pour les termes visqueux et advectifs respectivement. La viscosité n'étant pas prise en compte ici, un schéma totalement explicite peut alors être retenu.

V – Résultats numériques

Deux cas de sloshing en deux dimensions seront traités afin d'analyser la performance de l'outil numérique développé dans ce travail. Le domaine de calcul Ω est représenté sur la Figure 3. Une condition de glissement des fluides (vitesse normale nulle) est imposée sur l'ensemble des frontières du domaine. La pression est imposée à zéro sur un nœud du maillage, inclus dans le fluide (+). Les deux fluides sont caractérisés par leur masse volumique : $\rho_+ = 10 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_- = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, avec un ratio $r = 1/100$. La surface libre est initialisée selon le premier mode de déformation linéaire :

$$\eta(x, t = 0) = A \cos(kx) \quad (43)$$

Avec A l'amplitude d'oscillation, k le nombre d'onde ($k = \pi/L$) et $L = 1 \text{ m}$ la largeur du réservoir. La surface libre doit naturellement osciller avec la gravité.

Plusieurs études ont pu être réalisées au préalable pour déterminer certains choix de paramétrisation. Les résultats issus d'un cas d'équilibre hydrostatique ont montré que les

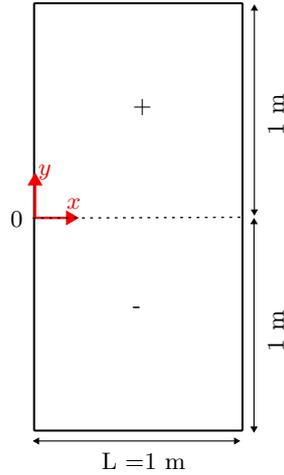


FIGURE 3 – Domaine de calcul (2D)

vitesses parasites, qui surviennent lors du lissage de la fonction de Heaviside, peuvent être réduites en augmentant l'ordre spatial. En effet, cela permet de calculer les gradients de pression et de vitesse avec plus de précision, les solutions sont alors moins bruitées. De plus, il a été important de remarquer que ces courants parasites sont drastiquement réduits lorsque la pression est calculée avec un ordre de plus que la vitesse sur des maillages quad-structurés. Ces résultats ont pu aussi démontrer que lorsque l'épaisseur de la surface libre diminue alors la pression numérique converge vers la théorie, ce qui est cohérent puisque l'on se rapproche du cas réel. Pour un même maillage, l'augmentation de l'ordre spatial permet de diminuer l'épaisseur de transition entre les deux fluides puisque d'une part le domaine de calcul est enrichi avec des nœuds supplémentaires et d'autre part car la solution $H(\chi)$ (7) dans la zone de transition est calculée plus précisément. Une loi d'épaisseur a finalement pu être déterminée : $\epsilon(k) = h/k$.

Pour ces deux cas de sloshing, la pression sera alors calculée, selon les remarques précédentes, avec un ordre de plus que la vitesse sur des maillages quad-structurés. De plus, l'épaisseur de transition entre les deux fluides sera choisie selon la loi $\epsilon(k)$ citée précédemment. Enfin, l'avance temporelle utilisée sera de type RK2 du point milieu.

V – 1 Sloshing linéaire

La surface libre est supposée osciller très légèrement ($A = 0,005$ m, cambrure $2A/\lambda = 0,5\%$). En théorie potentielle, il existe une solution analytique pour ce cas spécifique. La Figure 4 présente l'évolution temporelle de la surface libre sur la frontière droite du domaine. Les solutions proviennent du même maillage ($h/L = 0,03$) aux ordres 1, 2 et 3. La position de la surface libre η et le temps t sont adimensionnalisés avec l'amplitude A et la période T d'oscillation respectivement. On observe sur la Figure 4 que l'augmentation de l'ordre spatial permet aux solutions de converger vers les valeurs théoriques. Le Tableau 1 réfère les erreurs calculées sur la première période d'oscillation, l'augmentation de l'ordre spatial permet ici de corriger cette erreur. Par ailleurs, la proportion du volume du fluide inférieur (-) dans le volume total est contrôlée au cours de la simulation afin de vérifier la conservation de la masse. Les variations de volume restent inférieures aux valeurs notées dans le Tableau 1. Quel que soit l'ordre choisi, $(\Delta V_m) \approx 0$ ce qui témoigne d'une bonne

propriété de conservation de la masse.

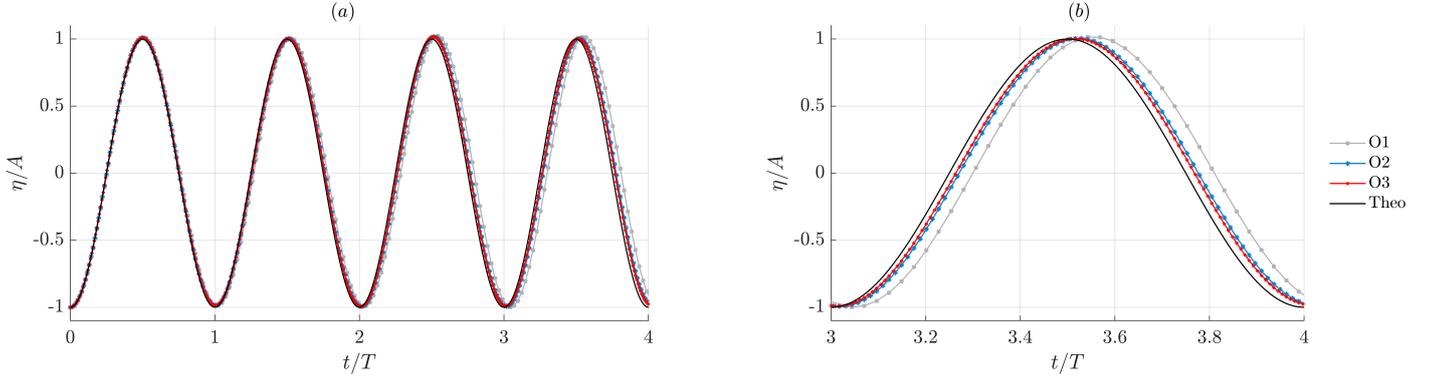


FIGURE 4 – Evolution temporelle de la surface libre sur la frontière droite du domaine pour $h/L = 0,03$ et $A/L = 0,005$: (a) Quatre périodes , (b) : Dernière période.

Ordre	Erreur sur la 1 ^{ère} période	ΔV_m
1	1,62 %	$1,8 \cdot 10^{-5}$
2	0,75 %	$1,0 \cdot 10^{-5}$
3	0,55 %	$8,0 \cdot 10^{-6}$

TABLE 1 – Erreur sur la période et variation du volume du fluide (-) pour $h/L = 0,03$ et $A/L = 0,005$.

V – 2 Sloshing non-linéaire

Le choix de l'amplitude d'oscillation est imposé égal à $A = 0,05$ m, conduisant à l'apparition de non-linéarités de la surface libre. Sur la Figure 5, les solutions numériques sont comparées aux résultats issus du code totalement non-linéaire FSID, basé sur un modèle potentiel bifluide [9]. Une nouvelle fois, l'augmentation de l'ordre spatial permet aux solutions de converger vers la solution de référence, l'erreur calculée sur la première période d'oscillation est alors corrigée (voir Tableau 2). La proportion du volume du fluide inférieur (-) est aussi contrôlée dans ce cas de figure (voir Tableau 2). La variation du volume est plus importante que pour le cas de faibles déformations. La dynamique étant plus présente dans ce ballotement, les mouvements des fluides y sont donc plus importants et peuvent favoriser l'apparition d'erreur sur la conservation des volumes de chaque fluide. Toutefois, le schéma assure toujours une bonne propriété de conservation de la masse.

Ordre	Erreur sur la 1 ^{ère} période	ΔV_m
1	0,99 %	$1,18 \cdot 10^{-3}$
2	0,42 %	$1 \cdot 10^{-3}$

TABLE 2 – Erreur sur la période et variation du volume du fluide (-) pour $h/L = 0,03$ et $A/L = 0,05$.

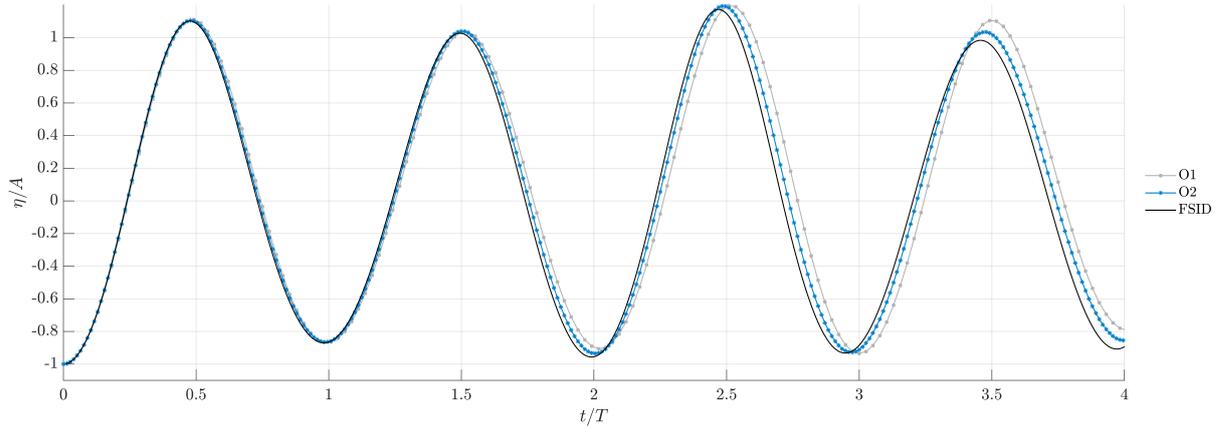


FIGURE 5 – Evolution temporelle de la surface libre sur la frontière droite du domaine pour $h/L = 0,03$ et $A/L = 0,05$.

VI – Conclusion

L’outil numérique présenté dans ce papier se base sur un couplage des méthodes MEF/Level-Set afin de simuler un cas de sloshing de type bifluide, à phases incompressibles et non-visqueuses. De nos jours, les principales méthodes utilisées en CFD sont basées sur une approche Volumes Finis, utilisant des ordres spatiaux généralement inférieurs à deux. A l’inverse, une approche Eléments Finis se base sur des schémas d’ordre élevé, ce qui a motivé le choix de cette méthode pour le développement de cet outil. La méthode Level-Set est utilisée pour suivre l’évolution de la surface libre au cours de la simulation numérique. Contrairement à la méthode Volume-Of-Fluid, elle représente la surface libre de façon continue. De plus, elle est facilement applicable aux ordres élevés en Eléments Finis. Dans cette étude, l’interface entre les deux fluides est fictivement épaissie de façon à ce que la masse volumique soit continue lors du passage du fluide un au fluide deux. Par ailleurs, la stabilité du schéma numérique est assurée par :

- L’utilisation d’une méthode de projection consistant à résoudre séparément les champs de pression et de vitesse.
- L’utilisation d’une méthode de Galerkin Discontinu pour résoudre l’équation de transport Level-Set et la partie advective de l’équation de conservation de la quantité de mouvement.

Les résultats numériques sont issus de deux configurations différentes de sloshing, où l’amplitude d’oscillation varie d’un cas à l’autre. Les résultats numériques sont comparés dans un premier temps aux solutions analytiques d’un cas de sloshing faible déformation, puis au code à surface libre non-linéaire FSID. Pour les deux cas, l’augmentation de l’ordre spatial permet aux solutions numériques de converger vers les solutions de référence. En effet, lorsque l’on augmente l’ordre spatial, les solutions sont approchées par des polynômes d’ordre élevé dans les éléments, ce qui conduit à une meilleure précision des résultats. Près de l’interface, le gradient de la masse volumique est très important ($r = 1/100$). L’augmentation de l’ordre spatial permet dans un premier temps de calculer plus précisément la solution $H(\chi)$, qui pour rappel varie selon les masses volumiques des deux fluides, et dans un second temps de calculer plus précisément les gradients de pression et de vitesse qui sont nécessaire à la résolution de l’équation de conservation de la quantité de mouvement.

Ce code de calcul permettra par la suite de simuler une variété d'écoulements à surface libre pouvant présenter une forte dynamique, comme la propagation d'une houle fortement non-linéaire, d'une vague déferlante, etc.

Références

- [1] I. Babuška. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 20(3) :179–192, 1973.
- [2] C.-W. S. Bernardo Cockburn. Runge–kutta discontinuous galerkin methods for convection-dominated problems. *Journal of Scientific Computing*, 16 :173–261, 2001.
- [3] A. J. Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of computational physics*, 135(2) :118–125, 1997.
- [4] B. Cockburn and C.-W. Shu. The local discontinuous galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(6) :2440–2463, 1998.
- [5] B. N. C.W Hirt. Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39 :201–225, 1981.
- [6] M. Franco, J.-S. Camier, J. Andrej, and W. Pazner. High-order matrix-free incompressible flow solvers with gpu acceleration and low-order refined preconditioners. *Computers and Fluids*, 203, 4 2020.
- [7] M. B. Friess. *Eléments finis stabilisés pour des écoulements diphasiques compressible-incompressible*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1, 2009.
- [8] E. Marchandise. *Simulation of three-dimensional two-phase flows : coupling of a stabilized finite element method with a discontinuous level set approach*. PhD thesis, Université Catholique de Louvain, 2006.
- [9] Y.-M. Scolan. Some aspects of the flip-through phenomenon : A numerical study based on the desingularized technique. *Journal of Fluids and Structures*, 26(6) :918–953, 2010.
- [10] J. A. S. Stanley Osher. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal Of Computational Physics*, 79 :12–49, 1988.
- [11] L. Zhao, J. Mao, X. Bai, X. Liu, T. Li, and J. Williams. Finite element implementation of an improved conservative level set method for two-phase flow. *Computers Fluids*, 100 :138–154, 2014.