

Crédit photo : H. Bonnard / P'

Couplage de la méthode de Lattice Boltzmann et la méthode de pénalisation volumique pour la simulation des phénomènes d'interaction fluide structure

Coupling of the Lattice Boltzmann method and the volume penalization method for the simulation of fluid-structure interaction phenomena

E.LIBERGE, C. BEGHEIN

erwan.liberge@univ-lr.fr; claudine.beghein@univ-lr.fr

LaSIE UMR 7356 CNRS, La Rochelle Université

Résumé

Dans cet article, deux approches différentes de calcul des efforts fluides sont comparées dans le cadre de la méthode de Lattice Boltzmann couplée avec la pénalisation volumique (VP-LBM). La première méthode, la méthode Momentum Exchange, utilise la variation des fonctions de distribution près de l'interface fluide-solide, tandis que la seconde, la méthode Stress Integration, permet l'intégration directe des forces fluides sur cette interface. Appliquées à la VP-LBM, qui consiste à pénaliser le solide dans le LBM, ces deux méthodes conduisent à des résultats significativement différents. Les essais sont réalisés pour étudier d'une part les coefficients de portance et de traînée d'un profil aérodynamique Naca 0012 à différents angles d'attaque, au nombre de Reynolds 1000, et d'autre part, la sédimentation de particules sous gravité dans un canal.

Summary

In this paper, two different approaches to calculating fluid forces are compared within the framework of the Lattice Boltzmann method coupled with volume penalization (VP-LBM). The first method, the momentum exchange method, uses the variation of distribution functions near the fluid-solid interface, while the second, the stress integration method, allows the direct integration of fluid forces on this interface. Applied to the VP-LBM, which consists of penalizing the solid in the LBM, these two methods lead to significantly different results. The tests are carried out to study, on the one hand, the lift and drag coefficients of a Naca 0012 airfoil at different angles of attack, at Reynolds number 1000, and on the other hand, the sedimentation of particles under gravity in a channel.

I – Introduction

De nombreuses méthodes et algorithmes efficaces pour modéliser l’interaction fluide-structure ont été développés dans un passé récent, avec toujours le souci conjoint d’améliorer la précision et la rapidité des calculs. Une approche classique consiste à coupler un solveur de fluide pour les équations de Navier-Stokes avec un solveur de structure, le solveur de fluide étant obtenu par une méthode de discrétisation classique, telle que la méthode des éléments finis ou des volumes finis. Nous proposons dans cet article d’utiliser la méthode Lattice Boltzmann (LBM) comme solveur de fluide pour la simulation numérique de l’interaction fluide structure.

La LBM a été développée avec succès pour la mécanique des fluides depuis les années 90 et est apparue comme une méthode de calcul alternative efficace. Basée sur l’équation de Boltzmann, le calcul est effectué à l’échelle mésoscopique afin de déterminer des grandeurs macroscopiques telles le champ de vitesse d’un écoulement ou le champ de pression. Un des intérêts de la LBM réside dans sa simplicité de programmation et dans le faible temps de calcul si l’algorithme est résolu sur carte graphique (GPU) [6].

Dans des articles précédents [4, 2, 3], nous avons proposé de coupler la méthode de Pénalisation Volumique (VP) et la LBM, sous le nom de VP-LBM. La méthode de pénalisation de volume consiste à étendre les équations de Navier-Stokes à l’ensemble du domaine (fluide et solide) et à ajouter un terme de pénalisation volumique pour prendre en compte la structure. L’approche peut être considérée comme un mélange entre les méthodes de type PSBB (Partially Saturated Bounce-Back) et les méthodes de type IB (Immersed Boundary). Cependant, la méthode de pénalisation du volume ne nécessite pas l’étape coûteuse du calcul de la fraction volumique du domaine solide près de l’interface comme pour les méthodes PSBB. La différence par rapport aux méthodes IB est que la méthode VP utilise une force volumique, au lieu de forces locales sur des marqueurs lagrangiens. La capacité des méthodes de pénalisation pour les problèmes d’interaction fluide-structure a été démontrée par [5]. Dans un travail précédent, Benamour *et al.* [2, 3] ont montré que la VP-LBM donne de bons résultats pour les solides fixes. Dans [4], la méthode a également été testée avec succès pour des solides avec déplacements imposés et un cas d’interaction fluide structure. Dans ce travail précédent, la méthode Momentum Exchange (ME), spécifique à l’approche de type LBM et qui consiste à évaluer la variation de la quantité de mouvement à l’interface, a été utilisée pour calculer les forces fluides, et, bien que les résultats aient été validés, des oscillations parasites ont pu être observées, pour le cas d’interaction fluide structure, sur les coefficients de portance et de traînée. Nous proposons dans cet article, de comparer la méthode ME et l’autre méthode bien connue pour calculer les forces dans le LBM, la méthode Stress-Intégration, qui consiste à évaluer les contraintes et calculer leur intégrale sur l’interface, sur de nouveaux cas, le profil aérodynamique NACA 0012 avec des angles d’attaque de 0° à 28° au nombre de Reynolds 1000, et la sédimentation de particules sous gravité dans un canal. Cette dernière méthode de calcul des efforts donne de meilleurs résultats.

II – Cadre théorique

Nous présentons dans cette section les modèles numériques. Les notations suivantes sont utilisées : ρ et \mathbf{u} sont les champs macroscopiques de masse volumique et de vitesse. Une variable en gras représente un vecteur.

II – 1 La pénalisation volumique

Soit Ω_f le domaine fluide, Ω_s le domaine solide, et Γ l’interface fluide-solide. On note alors $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s \cup \Gamma$ le domaine tout entier. Le principe de la méthode de pénalisation volumique

(VP) est d'étendre les équations de Navier-Stokes au domaine entier Ω , et de considérer le domaine solide Ω_s comme un milieu poreux à très faible perméabilité. La méthode a été introduite par Angot et al. [1] et a été utilisée à de nombreuses reprises pour modéliser le comportement de corps rigides dans un écoulement [9]. La faible perméabilité du domaine solide est modélisée via un coefficient de pénalisation. Ainsi la continuité des vitesses à l'interface fluide-solide est naturellement imposée. La formulation du problème macroscopique s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{\chi_{\Omega_s}}{\eta} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \end{aligned} \quad (1)$$

avec

$$\chi_{\Omega_s}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_s(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ; \quad \eta \ll 1 \text{ coefficient de pénalisation} \quad (2)$$

\mathbf{u} est le champ de vitesse, p le champ de pression, ρ et ν sont la masse volumique et la viscosité du fluide. $\mathbf{F} = \frac{\chi_{\Omega_s}}{\eta} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s)$ est le terme de pénalisation, et \mathbf{u}_s le champ de vitesse dans le domaine solide.

II – 2 Formulation via la méthode de Lattice Boltzmann

Basée sur l'équation de Boltzmann, la méthode de Lattice Boltzmann est utilisée comme solveur en mécanique depuis les années 90. Nous résumerons ci-dessous le principe général de la méthode. Une bibliographie complète peut être trouvée dans [10].

Le schéma à deux temps de relaxation (TRT) sur réseau de discrétisation D2Q9 (Figure 1) s'écrit :

$$\forall \alpha = 1, \dots, 9$$

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\Delta t}{\tau^+} (f_\alpha^+(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq+}(\mathbf{x}, t)) - \frac{\Delta t}{\tau^-} (f_\alpha^-(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq-}(\mathbf{x}, t)) \\ &\quad + \left(1 - \frac{\Delta t}{2\tau^+}\right) F_\alpha \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{avec } f_\alpha^+ = \frac{f_\alpha + f_{\bar{\alpha}}}{2}, \quad f_\alpha^- = \frac{f_\alpha - f_{\bar{\alpha}}}{2}, \quad \tau^- = \frac{\Delta t \Lambda}{\tau^+ - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}, \quad \tau^+ = 3\nu_f \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}.$$

$f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ est la densité de probabilité de trouver une particule à l'instant t à la position \mathbf{x} ayant une vitesse \mathbf{c}_α , et f_α^{eq} la valeur de ces fonctions de distribution à l'équilibre :

$$f_\alpha^{eq} = \omega_\alpha \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : (\mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}_\alpha - c_s^2 \mathbf{I})}{2c_s^4} \right). \quad (4)$$

où $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$ est la vitesse du son associée au réseau D2Q9, avec la contrainte $\frac{\mathbf{u}}{c_s} \ll 1$. La méthode de Chapman-Enskog fait le lien entre l'équation (3) et les équations de Navier-Stokes.

Les variables macroscopiques sont ensuite obtenues via :

$$\rho = \sum_\alpha f_\alpha \quad \rho \mathbf{u} = \sum_\alpha \mathbf{c}_\alpha f_\alpha + \frac{\Delta t}{2} \rho \mathbf{F} \quad p = \rho c_s^2 \quad (5)$$

Dans le cas présent, on remplace \mathbf{F} par le terme de pénalisation :

$$\rho \mathbf{u} = \sum_\alpha \mathbf{c}_\alpha f_\alpha - \frac{\Delta t}{2} \rho \frac{\chi_{\Omega_s}}{\eta} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \quad (6)$$

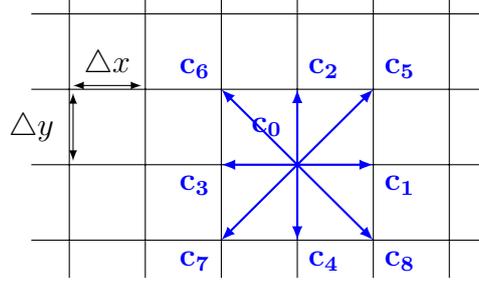


FIGURE 1 – Schéma de discrétisation D2Q9

Pour éviter les instabilités numériques, le terme de pénalisation est déplacé au membre de droite de l'équation (6)

$$\rho \left(1 + \frac{\Delta t \chi_{\Omega_s}}{2} \frac{\rho}{\eta} \right) \mathbf{u} = \sum_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha} f_{\alpha} + \frac{\Delta t}{2} \rho \frac{\chi_{\Omega_s}}{\eta} \mathbf{u}_s \quad (7)$$

Au final, le champ de vitesse macroscopique est calculé via l'équation suivante :

$$\mathbf{u} = \frac{\sum_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha} f_{\alpha} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\chi_{\Omega_s}}{\eta} \rho \mathbf{u}_s}{\rho + \frac{\Delta t}{2} \frac{\chi_{\Omega_s}}{\eta} \rho} \quad (8)$$

Ainsi, dans le domaine fluide où $\chi_{\Omega_s} = 0$ on retrouve la formulation classique de la LBM, et dans le domaine solide où $\chi_{\Omega_s} = 1$, l'équation (8) force le champ de vitesse vers \mathbf{u}_s .

II – 3 Calcul des efforts fluides

Angot *et al.* [1] ont proposé dans le contexte d'une formulation intégrale de calculer les efforts fluides par la formule suivante :

$$\mathcal{F}_f = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\Omega_s} \mathbf{u} - \mathbf{u}_s d\Omega \quad (9)$$

Cette formule (9) donne de bons résultats en éléments ou volumes finis, mais pas dans le cas de nos tests avec la LBM. C'est pourquoi nous présentons dans la suite deux approches classiques de calcul des efforts fluides en LBM.

II – 3.1 Momentum Exchange Method (MME)

Les efforts fluides sont calculés en regardant la variation de la quantité de mouvement. Cette méthode a été proposée par Wen *et al.* [16].

Soit \mathbf{x}_f un nœud frontière dans le domaine fluide, et \mathbf{x}_s son image à travers l'interface selon une direction \mathbf{c}_{α} , également appelée direction entrante (cf. figure 2). Le point d'intersection entre l'interface fluide-solide Γ et $\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_s$ est notée \mathbf{x}_{Γ} , et la direction sortante est notée $\mathbf{c}_{\bar{\alpha}} = -\mathbf{c}_{\alpha}$.

Localement, la force induite par le fluide au point \mathbf{x}_{Γ} se calcule via l'expression suivante :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_{\Gamma}) = (\mathbf{c}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\Gamma}) \tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_f) - (\mathbf{c}_{\bar{\alpha}} - \mathbf{u}_{\Gamma}) \tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_s). \quad (10)$$

La force totale agissant sur le solide s'obtient par sommation sur tout les points \mathbf{x}_{Γ} :

$$\mathcal{F}_f = \sum \mathbf{F}(\mathbf{x}_{\Gamma}) \quad (11)$$

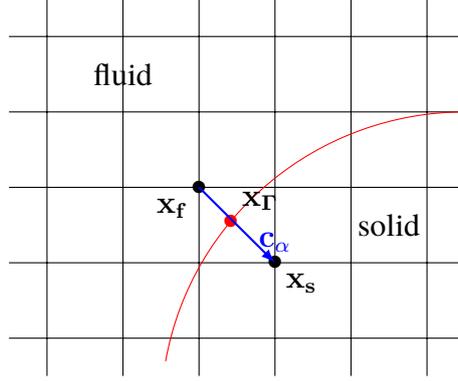


FIGURE 2 – Interface courbe sur une réseau cartésien : exemple d’un nœud frontière fluide \mathbf{x}_f , son image dans le domaine solide \mathbf{x}_s , et le point d’intégration \mathbf{x}_Γ situé sur l’interface

De même, le moment associé au centre de gravité est obtenu par :

$$\mathcal{T}_f = \sum (\mathbf{x}_\Gamma - \mathbf{x}_G) \times \mathbf{F}(\mathbf{x}_\Gamma), \quad (12)$$

où \mathbf{x}_G est le vecteur coordonné du centre de gravité.

Giovacchini and Ortiz [7] ont montré que cette méthode ne dépend pas de la manière dont les conditions d’interface sont imposées au domaine solide.

II – 3.2 Stress Integration Method (SIM)

Cette méthode est plus intuitive puisqu’elle consiste à intégrer le tenseur des contraintes fluides sur la structure :

$$\mathcal{F}_f = \int_{\partial\Omega_s} \sigma \cdot \mathbf{n} dS \text{ et } \mathcal{T}_f = \int_{\partial\Omega_s} \mathbf{r} \times \sigma \cdot \mathbf{n} dS \quad (13)$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma &= -pI_d + \nu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \\ &= -\rho c_s^2 I_d - \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \left(\sum_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha} \otimes \mathbf{c}_{\alpha} (f_{\alpha} - f_{\alpha}^{eq}) \right) \end{aligned} \quad (14)$$

\mathbf{n} est la normale extérieure au domaine solide.

Les f_{α} sont extrapolés du nœd le plus proche dans la direction \mathbf{n} dans le domaine fluide sur les nœuds d’intégrations \mathbf{x}_i placés arbitrairement sur l’interface.

Au finalFinally, l’équation (13) devient :

$$\mathcal{F}_f = \sum_i S_i \sigma(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n}_i \quad (15)$$

S_i et \mathbf{n}_i sont les surfaces d’intégration et les normales sortantes au nœud d’intégration \mathbf{x}_i .

III – Applications

Les calculs ont été effectués sur une carte NVIDIA QUADRO P500 GPU card, via une implémentation en CUDA. Une valeur de pénalisation $\eta = 10^{-6}$ a été choisie pour tout les cas présentés.

Dans la suite l.u. fait référence à lattice length units et t.s. à lattice time units.

III – 1 NACA airfoil

La première application est l'étude d'un profil NACA 0012 à différents angles d'attaque à Reynolds 1000. Ce cas est largement documenté dans la littérature [8, 11, 13], et permet de valider les deux différentes approches pour le calcul des efforts.

La figure 3 donne une représentation schématique du domaine de calcul. Le profil est situé à

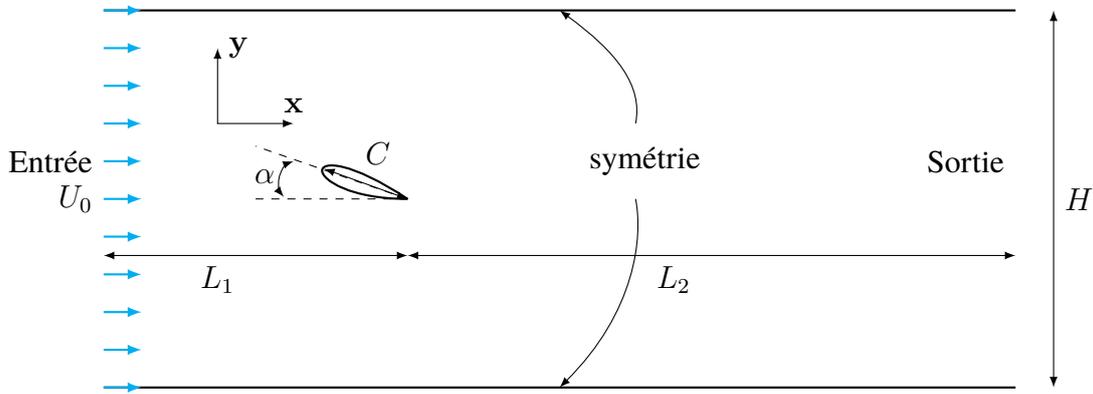


FIGURE 3 – Description schématique du domaine de calcul autour du profil NACA

$4C$ (C étant la corde du NACA) et $9C$ de la sortie. La hauteur est de $7C$, la structure étant située au milieu. Sur l'entrée, un profil constant de vitesse est imposé, et une condition de sortie libre est prise en compte pour la sortie. Des conditions de symétrie ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$) sont imposées sur les autres bords.

Les résultats présentés ont été obtenus avec les valeurs suivantes : following parameters (in lattice units) :

$$C = 278, \quad U_0 = 0.0599, \quad \tau = 0.55$$

On notera que τ est proche de la limite de stabilité de 0.5.

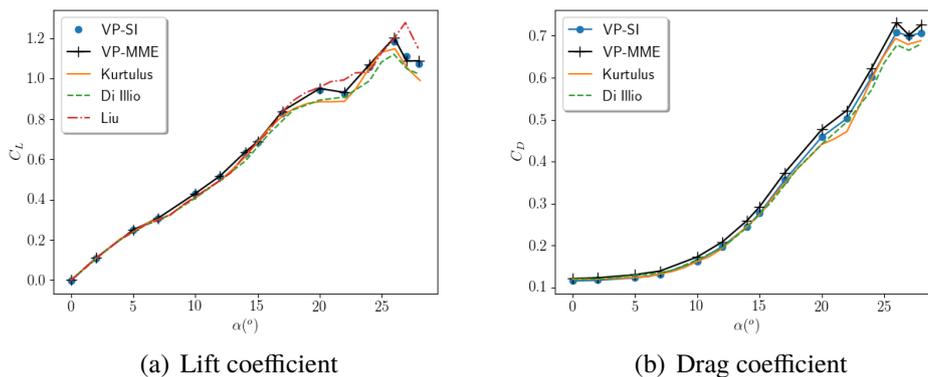


FIGURE 4 – Coefficients de portance et de traînée en fonction de l'angle d'incidence. Les résultats obtenus par la méthode VP-LBM et MEM ou SIM sont comparés avec la littérature

Les coefficients de traînée et de portance sont affichés sur la figure 4. Quelque soit la méthode utilisée, la méthode VP-LBM donne une bonne évaluation de ces coefficients. On remarque que la crise de traînée est bien capturée pour un angle d'attaque autour de 26° . La traînée semble légèrement surestimée par la méthode de Momentum Exchange (MME), sans doute à cause de l'approximation de la frontière induite par cette approche.

III – 2 Sédimentation d'une particule dans un canal

La deuxième application étudie la chute d'une particule dans un canal infini (figure 5). Ce problème a été plusieurs fois utilisé comme exemple de validation de part la trajectoire complexe que suit la particule [15, 14, 16, 12].

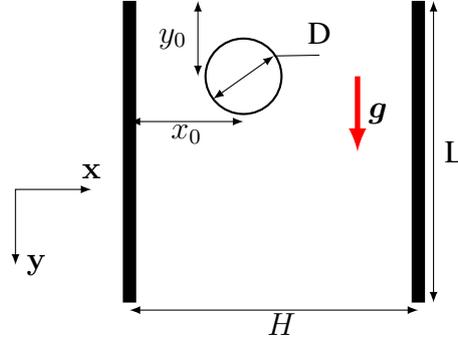


FIGURE 5 – Description schématique pour la sédimentation d'une particule

Une particule circulaire de diamètre D , de masse volumique ρ_s tombe sous l'effet de la gravité \mathbf{g} dans un fluide de masse volumique ρ dans un canal vertical de largeur H . A l'état initial, la particule est située à une distance x_0 du bord gauche et à une distance y_0 du haut du canal. La trajectoire de la particule suite les équations (16) et (17) :

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}_G}{dt^2} = \mathcal{F}_f + m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_s} \right) \mathbf{g} \quad (16)$$

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \mathcal{T}_f, \quad (17)$$

m étant la masse de la particule. Pour de faibles nombres de Reynolds, et $\tilde{H} = \frac{H}{D} \gg 1$, la trajectoire atteint une solution stationnaire.

Les paramètres du calcul sont $x_0 = 0.75D$ (particule non centrée), $\rho = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, $\mu = 0.1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ et $D = 0.1 \text{ cm}$. 4 rapports de masse sont étudiés : $\rho_r = \frac{\rho_s}{\rho_f} = 1.0015, 1.003, 1.0015$ et 1.03 . Les nombres de Reynolds calculés à partir de la vitesse à temps long finale des particules sont $\text{Re} = 0.52, 1.03, 3.23$ et 8.33 .

La trajectoire de la particule pour chaque rapport de masse est présenté et comparé avec la littérature [14, 12] sur la figure 6. On remarque que la méthode VP-LBM avec SI permet de capturer correctement la trajectoire de la particule, quelque soit le rapport de masse. Ce n'est pas le cas lorsque les efforts sont calculés par la méthode de Momentum Exchange. Bien que la trajectoire semble correcte pour des rapports de masse élevés, l'écart augmente quand le rapport de masse diminue. Pour de faibles rapports de masse, la contribution des efforts dûs au fluide est relativement plus importante par rapport à la gravité. Une petite erreur sur leur estimation engendre des écarts plus importants sur la trajectoire. Le manque de précision de l'interface fluide solide lors du calcul des efforts par la méthode de Momentum Exchange a une grande conséquence sur ce étudié ici.

Sur les figures 7 sont représentées les vitesses de rotation de la particules pour les plus faibles et plus grands rapports de masse. Pour $\rho_r = 1.0015$ (figure 7(a)) on observe énormément d'oscillations parasites avec la méthode ME. Même si la moyenne suit la solution de référence, ces oscillations font dévier la particule de la trajectoire de référence. Sur la figure 7(b) ces oscillations sont plus faibles, mais même si la solution est proche de celle de référence, la méthode Stress Integration donne des résultats meilleurs.

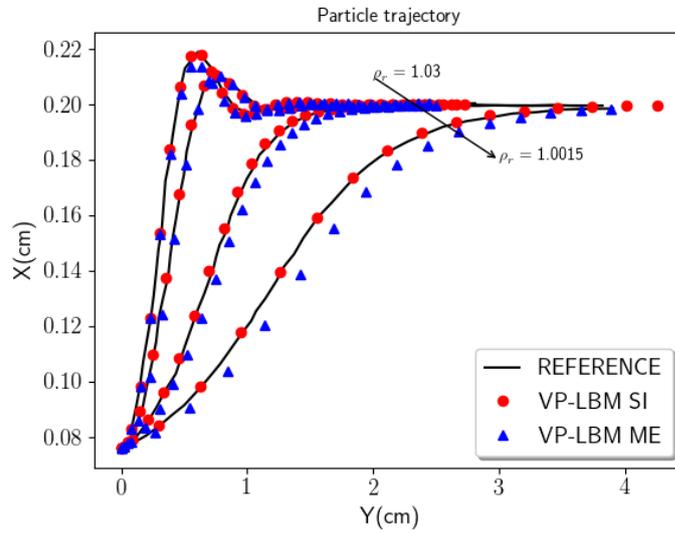


FIGURE 6 – Trajectoire de la particule pour différents rapports de masse - comparaison avec la littérature [14]

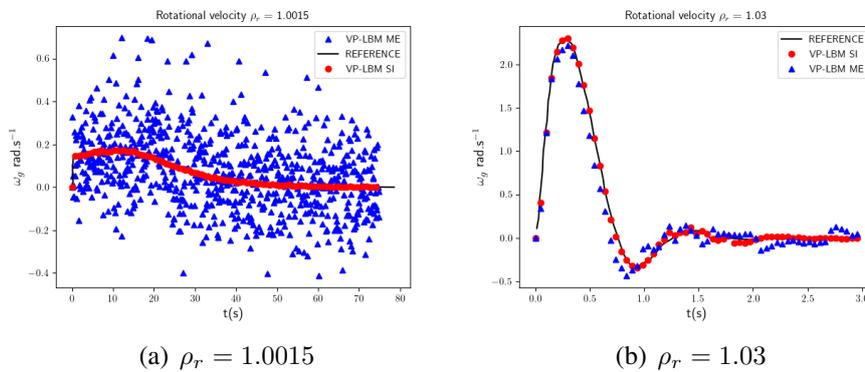


FIGURE 7 – Rotational velocity obtained using the VP-LBM approach and compared with reference's results [14, 12]

Cet exemple permet de conclure que la méthode VP-LBM, couplée avec la méthode de Stress Integration pour le calcul des efforts fluides, est capable de prédire des trajectoires complexes pour l'interaction fluide structure.

IV – Conclusion

La méthode de pénalisation volumique couplée à la méthode de Lattice Boltzmann (VP-LBM) a été appliquée avec succès sur deux nouveaux cas. Le choix de la méthode de calcul des efforts fluides, Momentum Exchange ou Stress Integration, a été discuté. Quelque soit la manière dont les efforts fluides sont calculés, la VP-LBM a montré sa capacité à reproduire la physique complexe d'un profil aérodynamique à différents angles d'attaque, et le phénomène de décrochage a été bien capturé. Pour cette application, les méthodes Momentum Exchange (ME) et Stress Integration (SI) donnent des résultats similaires, mais les coefficients de traînée semblent un peu plus précis avec SI. Dans le deuxième exemple, la sédimentation de particules sous gravité, la méthode SI a donné les meilleurs résultats. Les trajectoires de la particule ont été correctement prédites, et les oscillations parasites observées avec la méthode ME ne sont pas présentes avec la méthode SI. La VP-LBM combiné à la méthode Stress Integration donne des résultats satisfaisant pour simuler les problèmes d'interaction fluide-structure.

Références

- [1] P. Angot, C.-H. Bruneau, and P. Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numerische Mathematik*, 81(4) :497–520, 1999.
- [2] M. Benamour, E. Liberge, and C. Béghein. Lattice Boltzmann method for fluid flow around bodies using volume penalization. *International Journal of Multiphysics*, 9(3) :299–315, 2015.
- [3] M. Benamour, E. Liberge, and C. Béghein. A new approach using lattice Boltzmann method to simulate fluid structure interaction. *Energy Procedia*, 139 :481–486, 2017.
- [4] M. Benamour, E. Liberge, and C. Béghein. A volume penalization lattice boltzmann method for simulating flows in the presence of obstacles. *Journal of Computational Science*, 2020.
- [5] P. Destuynder and E. Liberge. A few remarks on penalty and penalty-duality methods in fluid-structure interactions. *Applied Numerical Mathematics*, 167 :1–30, 2021.
- [6] Z. Fan, F. Qiu, A. Kaufman, and S. Yoakum-Stover. GPU cluster for high performance computing. *IEEE/ACM SC2004 Conference, Proceedings*, pages 297–308, 2004.
- [7] J. P. Giovacchini and O. E. Ortiz. Flow force and torque on submerged bodies in lattice-Boltzmann methods via momentum exchange. *Phys. Rev. E*, 92 :063302, Dec 2015.
- [8] G. D. Ilio, D. Chiappini, S. Ubertini, G. Bella, and S. Succi. Fluid flow around naca 0012 airfoil at low-reynolds numbers with hybrid lattice boltzmann method. *Computers & Fluids*, 2018.
- [9] B. Kadoch, D. Kolomenskiy, P. Angot, and K. Schneider. A volume penalization method for incompressible flows and scalar advection-diffusion with moving obstacles. *Journal of Computational Physics*, 231(12) :4365–4383, 2012.
- [10] T. Kruger, H. Kusumaatmaja, A. Kuzmin, O. Shardt, G. Silva, and E. M. Viggén. *The Lattice Boltzmann Method - Principles and Practice*. Graduate Texts in Physics. Springer International Publishing, 2017.

- [11] D. F. Kurtulus. On the unsteady behavior of the flow around naca 0012 airfoil with steady external conditions at $re=1000$. *International Journal of Micro Air Vehicles*, 7(3) :301–326, 2015.
- [12] H. Li, X. Lu, H. Fang, and Y. Qian. Force evaluations in lattice Boltzmann simulations with moving boundaries in two dimensions. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 70(2 2) :026701–1–026701–9, 2004.
- [13] Y. Liu, K. Li, J. Zhang, H. Wang, and L. Liu. Numerical bifurcation analysis of static stall of airfoil and dynamic stall under unsteady perturbation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(8) :3427–3434, 2012.
- [14] S. Tao, J. Hu, and Z. Guo. An investigation on momentum exchange methods and refilling algorithms for lattice Boltzmann simulation of particulate flows. *Computers and Fluids*, 133 :1–14, 2016.
- [15] L. Wang, Z. Guo, B. Shi, and C. Zheng. Evaluation of three lattice Boltzmann models for particulate flows. *Communications in Computational Physics*, 13(4) :1151–1171, 2013.
- [16] B. Wen, C. Zhang, Y. Tu, C. Wang, and H. Fang. Galilean invariant fluid–solid interfacial dynamics in lattice Boltzmann simulations. *Journal of Computational Physics*, 266 :161 – 170, 2014.