

PRISE EN COMPTE DES EFFETS D'ÉLASTICITÉ DE LA TERRE DANS UN MODÈLE INTÉGRÉ SUR LA PROFONDEUR DE PROPAGATION DES TSUNAMIS

TAKING ACCOUNT OF EARTH ELASTICITY EFFECTS IN A DEPTH-AVERAGE MODEL FOR TSUNAMIS PROPAGATION

G.L. RICHARD⁽¹⁾, K. MSHEIK⁽²⁾, A. DURAN⁽²⁾

gael.richard@inrae.fr ; khawla.msheik@univ-lyon1.fr ; arnaud.duran@univ-lyon1.fr

⁽¹⁾Université Grenoble Alpes, INRAE, UR ETNA, Grenoble

⁽²⁾Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1

Résumé

Les principaux modèles de propagation de tsunamis se basent sur les équations de Saint-Venant ou sur des modèles de type Boussinesq. Bien que ces derniers soient plus précis, car aptes à décrire convenablement les effets dispersifs, de nombreuses mesures ont montré que ces modèles surestimaient la vitesse de propagation des tsunamis. À grande distance, ce retard, pouvant atteindre plusieurs minutes, est attribué aux effets de compressibilité de l'eau de mer, d'élasticité de la Terre et de variation du potentiel de gravitation, qui ne sont pas pris en compte dans ces modèles. Nous présentons dans ce travail une nouvelle approche pour décrire la propagation des tsunamis prenant en compte les effets combinés de la compressibilité et de l'élasticité terrestre (les effets liés au potentiel de gravitation sont laissés pour de futur travaux). Le modèle est dérivé en couplant une couche fluide faiblement compressible, représentant l'océan, à une couche solide viscoélastique de profondeur constante, représentant la couche supérieure de la Terre. Les équations résultantes sont moyennées sur l'épaisseur de la couche d'eau pour la partie liquide et sont intégrées sur l'épaisseur de la couche solide pour la partie solide. Le système d'équations obtenu est hyperbolique et admet une équation exacte de conservation d'énergie. Le modèle est dispersif et comprend une branche élastique, une branche acoustique et une branche gravitaire. Le système admet une solution de type soliton dans la limite ondes longues. Les résultats numériques ont permis de mettre en évidence l'influence de l'élasticité de la couche solide. On observe : 1) un effet de dispersion inverse, c'est-à-dire que la vitesse de phase de la branche de gravité diminue pour

les petits nombres d'onde ; 2) un retard d'arrivée du tsunami et 3) une phase négative initiale, c'est-à-dire une élévation de l'eau négative avant l'arrivée de la vague principale. Ces effets sont absents si le fond marin est supposé parfaitement rigide, et sont en accord avec les travaux antérieurs sur la propagation des tsunamis.

Summary

Many tsunami propagation models are based on the Saint-Venant equations or on Boussinesq type models. Although the latter are more precise, as they are able to adequately describe the dispersive effects, many measurements have shown that they tend to overestimate the propagation speed of tsunamis. At long distances, this delay, which can reach several minutes, is attributed to the effects of seawater compressibility, Earth elasticity and variation of gravitational potential, which are not taken into account in these models. We present in this work a new approach for tsunami propagation taking into account the combined effects of compressibility and earth elasticity (the effects related to the gravitational potential are left for future work). The model is derived by coupling a weakly compressible fluid layer, representing the ocean, to a viscoelastic solid layer of constant depth, representing the upper layer of the Earth. The resulting equations are averaged over the thickness of the water layer for the liquid part and are integrated over the thickness of the solid layer for the solid part. The resulting system of equations is hyperbolic and admits an exact energy conservation equation. The model is dispersive and includes an elastic branch, an acoustic branch and a gravitational branch. The system admits a soliton type solution in the long wave limit. The numerical results highlight the influence of the elasticity of the solid layer. We observe : 1) an inverse dispersion effect, *i.e.* the phase velocity of the branch of gravity decreases for small wavenumbers if the wavenumber decreases ; 2) a delay in the arrival of the tsunami and 3) a leading negative phase, *i.e.* a negative water elevation before the arrival of the main wave. These effects are absent if the seabed is assumed to be perfectly rigid, and are in agreement with previous works on tsunami propagation.

I – Introduction

Les modèles à surface libre sont très souvent utilisés pour décrire la propagation des tsunamis. Il sont obtenus en intégrant les équations d'Euler selon la coordonnée verticale, sous l'hypothèse de faible profondeur relative, c'est à dire que la longueur d'onde caractéristique de l'écoulement est supposée grande par rapport à la hauteur d'eau totale. Parmi eux, les équations de Saint-Venant sont très populaires, notamment car elles permettent de capturer les effets non-linéaires et leur structure hyperbolique est bien adaptée à la résolution numérique. Des travaux récents ont cependant montré l'impact que peuvent avoir les termes dispersifs sur l'écoulement, et notamment sur le profil et l'amplitude des vagues ([3, 4, 7]), justifiant l'utilisation de modèles de type Boussinesq. Néanmoins, plusieurs campagnes de mesures ont montré que ces modèles surestimaient la vitesse de propagation des tsunamis. À grande distance, ce retard peut atteindre un ordre de grandeur de 1% du temps total de propagation, occasionnant des écarts de 10 à 30 minutes sur l'estimation d'arrivée (voir par exemple les études menées dans [6, 8, 10]). Ce retard est imputé aux effets de la compressibilité de l'eau, de l'élasticité de la Terre et de la variation du potentiel de gravitation, qui ne sont pas décrits par les modèles dispersifs classiques.

L'influence de l'élasticité terrestre sur la propagation des tsunamis a été étudiée dans de récents travaux, notamment [1, 11]. Outre l'impact sur la vitesse de propagation,

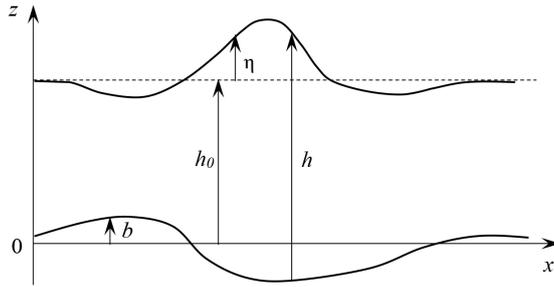


FIGURE 1 – Definition sketch.

les observations ont mis en évidence l'apparition d'une phase négative se développant à l'avant de la vague principale au cours de la propagation, essentiellement attribuée à la déformation du fond induite par le passage de la vague. Ce phénomène caractéristique des longues périodes a notamment été étudié dans [2], [13]. Il est lié à l'effet dit de *dispersion inverse*, qui traduit le fait que la vitesse de propagation tend à diminuer si le nombre d'onde diminue en deçà d'un certain seuil.

Les modèles existants aptes à prendre en compte les effets élastiques utilisent des méthodes de convolution [2, 3], ou bien se basent sur la théorie des modes normaux [5, 13]. Bien que ces méthodes permettent de capturer convenablement les effets induits par les déformations élastiques, leur résolution numérique concentre des difficultés techniques et mobilise une part non négligeable du temps de calcul. L'objectif de ce travail est de proposer un modèle simple permettant de capturer les effets liés à la dispersion, la compressibilité, ainsi que l'élasticité de la Terre. Dans cette optique, l'un des obstacles réside dans l'intégration numérique des modèles de type Boussinesq, qui implique le traitement d'une phase elliptique difficile à résoudre et coûteuse en temps de calcul. Ces difficultés techniques peuvent toutefois être contournées en exploitant des travaux récents [9], qui permettent de traiter la dispersion à travers un modèle hyperbolique et constituent à ce titre un cadre de travail privilégié d'un point de vue numérique. Ainsi, sur la base du modèle [9], qui prend déjà en compte la dispersion et les effets compressibles, nous proposons une solution de couplage pour inclure l'élasticité de la Terre.

II – Dérivation des équations pour la phase élastique

On considère dans ce travail un écoulement bi-dimensionnel autour d'une profondeur d'équilibre h_0 . On note η l'élévation de la surface par rapport à cet équilibre. Les variations du fond de l'océan induites par le passage d'une onde sont prises en compte à travers la position de l'interface liquide/solide, qui peut varier d'un état au repos $z = 0$ à une position $z = b$, où z désigne la coordonnée verticale (voir figure 1). La surface libre se situe à $z = h_0 + \eta$ et la hauteur d'eau est notée $h = h_0 + \eta - b$. Les termes viscoélastiques sont pris en compte par le tenseur des contraintes qui s'écrit comme la somme d'une partie élastique $\boldsymbol{\sigma}$ suivant la loi de Hooke et d'une partie visqueuse $\boldsymbol{\sigma}'$: $\boldsymbol{\sigma}_T = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}'$. En notant λ', η' les constantes de viscosité, le terme visqueux s'écrit comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2\mu'\mathbf{D} + \eta'(\text{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} \quad (1)$$

Pour de petites perturbations, la partie élastique du tenseur vérifie (voir [12]) :

$$\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial t} = 2\mu\mathbf{D} + \lambda(\text{tr}\mathbf{D})\mathbf{I}, \quad (2)$$

où \mathbf{D} est le tenseur du taux de déformation, \mathbf{I} le tenseur identité et λ, μ les coefficients de Lamé. Par ailleurs, la seconde loi de Newton donne lieu à la relation suivante :

$$\rho_s \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} = \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_T, \quad (3)$$

où ρ_s est la densité de la couche solide et $\dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_x, \dot{u}_z)$ désigne la vitesse dans le solide. Les composantes du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ sont notées $(\sigma_{xx}, \sigma_{xz}, \sigma_{zz})$ et celles du tenseur $\boldsymbol{\sigma}'$ sont notées $(\sigma'_{xx}, \sigma'_{xz}, \sigma'_{zz})$. À l'interface liquide/solide, la condition cinématique donne :

$$\dot{u}_z(b) = \frac{\partial b}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial b}{\partial x}, \quad (4)$$

et la condition dynamique :

$$-[\sigma_{xx}(b) + \sigma'_{xx}(b)] \frac{\partial b}{\partial x} + \sigma_{xz}(b) + \sigma'_{xz}(b) = p(b) \frac{\partial b}{\partial x}, \quad (5)$$

$$-[\sigma_{xz}(b) + \sigma'_{xz}(b)] \frac{\partial b}{\partial x} + \sigma_{zz}(b) + \sigma'_{zz}(b) = -p(b), \quad (6)$$

où $p(b)$ correspond à la pression au fond de l'océan. La vitesse et le déplacement sont supposés nuls en dessous de $z = -H$, c'est à dire $u_z(-H) = 0$ et $\dot{u}_z(-H) = 0$. La partie élastique du système est obtenue en intégrant les équations (2) et (3) sur la profondeur de la couche solide de $z = -H$ à $z = b$. A cet effet, on définit les quantités :

$$q_2 = \int_{-H}^b \dot{u}_z dz \quad , \quad S_{12} = \int_{-H}^b \sigma_{xz} dz. \quad (7)$$

En notant L la longueur d'onde caractéristique de l'écoulement, les équations (2) et (3) ainsi que les conditions aux limites (4),(5),(6) sont réécrites sous forme adimensionnée sous l'hypothèse de faible profondeur relative $\varepsilon = h_0/L \ll 1$. En revenant aux formes dimensionnées, l'intégration de la première composante du tenseur (2) donne :

$$\frac{\partial S_{12}}{\partial t} - \mu \frac{\partial q_2}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

et (3) :

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial S_{12}}{\partial x} = -\frac{\rho_\ell}{\rho_s} gh - \frac{\sigma_{zz}(-H)}{\rho_s} - \frac{\sigma'_{zz}(-H)}{\rho_s} + \nu' \frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2}, \quad (9)$$

où $\nu' = \mu'/\rho_s$ est la viscosité cinématique et ρ_ℓ est la densité de la phase liquide. Dans la suite, on notera $c_s = \sqrt{\mu/\rho_s}$ la vitesse des ondes transverses, $c_p = \sqrt{(2\mu + \lambda)/\rho_s}$ la vitesse des ondes longitudinales et $\nu'_e = (2\mu' + \eta')/\rho_s$ la viscosité cinématique effective. Une analyse détaillée (non reproduite ici) des solutions des équations (3) permet d'obtenir l'expression des composantes σ_{zz} et σ'_{zz} en $z = -H$:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(-H) &= -\rho_\ell gh_0 + (2\mu + \lambda) \frac{b}{H}, \\ \sigma'_{zz}(-H) &= (2\mu' + \eta') \frac{2q_2}{H^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

de sorte que (9) peut s'écrire :

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial S_{12}}{\partial x} = -\frac{\rho_\ell}{\rho_s} g\eta - c_p^2 \frac{b}{H} - \nu'_e \frac{q_2}{H^2} + \nu' \frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2}. \quad (11)$$

Par ailleurs, il vient de cette même étude que les quantités b et q_2 sont liées par la relation :

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{2q_2}{H}. \quad (12)$$

En pratique, les validations numériques ont montré que le terme diffusif $\nu' \frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2}$ avait un impact négligeable sur les simulations. On considèrera donc $\nu' = 0$ dans la suite.

III – Analyse mathématique

III – 1 Hyperbolicité

La dérivation des équations de la partie liquide s'effectue sur la base des travaux [9], et n'est donc pas reproduite ici. A terme, le système comporte sept équations, trois pour le solide et quatre pour la partie fluide, le couplage entre les deux phases s'effectuant à travers les équations sur q_2 et η :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} = \frac{M^2}{2} Q_0 h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2q_2}{H} \quad (13)$$

$$\frac{\partial hRU}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hRU^2 + hP) = -ghR \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (14)$$

$$\frac{\partial hRW}{\partial t} + \frac{\partial hRUW}{\partial x} = \frac{3}{2} P \quad (15)$$

$$\frac{\partial hRP}{\partial t} + \frac{\partial hRUP}{\partial x} = -a^2 \left(2W + h \frac{\partial U}{\partial x} \right) \quad (16)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial S_{12}}{\partial x} = -\frac{\rho_\ell}{\rho_s} g \eta - c_p^2 \frac{b}{H} - \nu'_e \frac{q_2}{H^2} \quad (17)$$

$$\frac{\partial S_{12}}{\partial t} - \mu \frac{\partial q_2}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{2q_2}{H} \quad (19)$$

Dans ces équations, la quantité R représente la densité moyenne du liquide divisée par la densité à la surface libre, et quantifie la compressibilité statique. Son expression est donnée par $R = (e^{M^2} - 1)/M^2$, avec $M = \sqrt{gh}/a$ le nombre de Mach. La quantité Q_0 est donnée par $Q_0 = 2(e^{-M^2} + M^2 - 1)/M^4$. Ce système peut se mettre sous forme quasi-linéaire :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (20)$$

avec $\mathbf{V} = (\eta, U, W, P, q_2, S_{12}, b)^T$ et

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} U & hRe^{-M^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -U \\ \frac{P}{hR} + g & U & 0 & \frac{1}{R} & 0 & 0 & -\frac{P}{hR} \\ 0 & 0 & U & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{R} & 0 & U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Il s'agit d'un système hyperbolique, dont les valeurs propres sont

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 & , & & \lambda_{2,3} &= U \\ \lambda_{4,5} &= U \pm \sqrt{(ghR + P) e^{-M^2} + a^2/R^2} & , & & \lambda_{6,7} &= \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}} \end{aligned} \quad (22)$$

Les vitesses caractéristiques $\lambda_{2,3}$ et $\lambda_{4,5}$ sont propres à la phase liquide. Elles correspondent respectivement au transport à la vitesse U et aux ondes acoustiques (voir [9]). Les caractéristiques $\lambda_{6,7}$ proviennent de la phase solide et représentent les ondes transverses dans la couche solide, tandis que l'onde stationnaire λ_1 provient de l'équation (19).

III – 2 Conservation de l'énergie

En multipliant l'équation (18) par $2S_{12}/\rho_s\mu H$ et (17) par $2q_2/H$, on obtient, après sommation, l'équation d'énergie relative à la couche solide :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q_2^2}{H} + \frac{S_{12}^2}{\rho_s\mu H} + \frac{c_p^2}{2H} b^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{\rho_s H} q_2 S_{12} \right) = -\frac{\rho_\ell}{\rho_s} g \eta \frac{\partial b}{\partial t} - 2 \frac{\nu'_e}{H^3} q_2^2. \quad (23)$$

L'équation d'énergie de la partie liquide peut s'écrire (voir Richard 2021 [9]) :

$$\frac{\partial h R e_L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h R U e_L + \Pi U) = g h R \frac{\partial b}{\partial t}, \quad (24)$$

avec

$$e_L = \frac{U^2}{2} + \frac{2}{3} W^2 + \frac{Q_2 g h}{R} + g b + \frac{P^2}{2a^2} \quad , \quad \Pi = Q_1 \frac{g h^2}{2} + h P, \quad (25)$$

les quantités Q_1 et Q_2 étant données par :

$$Q_1 = \frac{2}{M^4} (e^{M^2} - M^2 - 1) \quad , \quad Q_2 = \frac{2}{M^4} [1 + (M^2 - 1) e^{M^2}]. \quad (26)$$

En multipliant l'équation (23) par ρ_s et l'équation (24) par ρ_0 on obtient, avec $\rho_\ell = \rho_0 R$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 h R e_L + \frac{\rho_s}{H} q_2^2 + \frac{S_{12}^2}{\mu H} + \frac{\rho_s c_p^2}{2H} b^2 - \rho_\ell g h_0 b + \rho_\ell g \frac{b^2}{2} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_0 h R U e_L + \rho_0 \Pi U - \frac{2}{H} q_2 S_{12} \right) = -2 \frac{\rho_s \nu'_e}{H^3} q_2^2. \end{aligned} \quad (27)$$

En introduisant la quantité $u_{zeq}(z) = -\rho_\ell g h_0 (z+H)/(2\mu+\lambda)$, qui correspond au déplacement vertical à l'équilibre, on peut définir une énergie potentielle E_{ps} pour la partie solide, analogue à l'énergie potentielle d'un ressort de raideur $\rho_s c_p^2/H$:

$$E_{ps} = \frac{\rho_s c_p^2}{2H} b^2 - \rho_\ell g h_0 b + \frac{1}{2} \frac{H}{\rho_s c_p^2} (\rho_\ell g h_0)^2 = \frac{1}{2} \frac{\rho_s c_p^2}{H} (b + u_{zeq}(0))^2. \quad (28)$$

A terme, le bilan d'énergie est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 h R e_L + \frac{\rho_s}{H} q_2^2 + \frac{S_{12}^2}{\mu H} + E_{ps} + \rho_\ell g \frac{b^2}{2} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_0 h R U e_L + \rho_0 \Pi U - \frac{2}{H} q_2 S_{12} \right) = -2 \frac{\rho_s \nu'_e}{H^3} q_2^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Les termes $\rho_s q_2^2/H$ et $S_{12}^2/(\mu H)$ correspondent respectivement à l'énergie cinétique et à l'énergie de déformation des ondes élastiques transversales. Le flux d'énergie correspondant pour ces ondes élastiques est $-2q_2 S_{12}/H$. Dans ces équations, $\nu' = 0$ de sorte qu'il n'y a pas de terme diffusif, et un seul terme dissipatif est dû à ν'_e . Il en résulte que le système (13)–(19) admet une équation d'énergie exacte, et cette énergie est conservée en absence de viscosité.

III – 3 Propriétés dispersives

La relation de dispersion du système est obtenue en considérant l'évolution de petites perturbations autour de l'état d'équilibre défini par $h = h_0$, $\eta = b = 0$, $U = W = 0$, $P = 0$, $q_2 = 0$ et $S_{12} = 0$. En cherchant des solutions sous la forme $\mathbf{A} \exp[i(kx - \omega t)]$ au système linéarisé (13)–(19), on obtient la relation de dispersion suivante :

$$\left(\omega^2 - c_s^2 k^2 - \frac{2c_p^2}{H^2} + i\omega \frac{\nu'_e}{H^2} \right) \left\{ \frac{h_0^2 R_0^2}{3a^2} \omega^4 - \omega^2 \left[1 + \frac{k^2 h_0^2}{3} \left(1 + \frac{gh_0}{a^2} R_0^3 e^{-M_0^2} \right) \right] + gk^2 h_0 R_0 e^{-M_0^2} \right\} - \frac{2\rho_\ell g}{\rho_s H} \left(\frac{h_0^2 R_0^2}{3a^2} \omega^2 - 1 - \frac{k^2 h_0^2}{3} \right) \omega^2 = 0, \quad (30)$$

où $M_0^2 = gh_0/a^2$, qui généralise la relation de dispersion obtenue dans [9] en l'absence

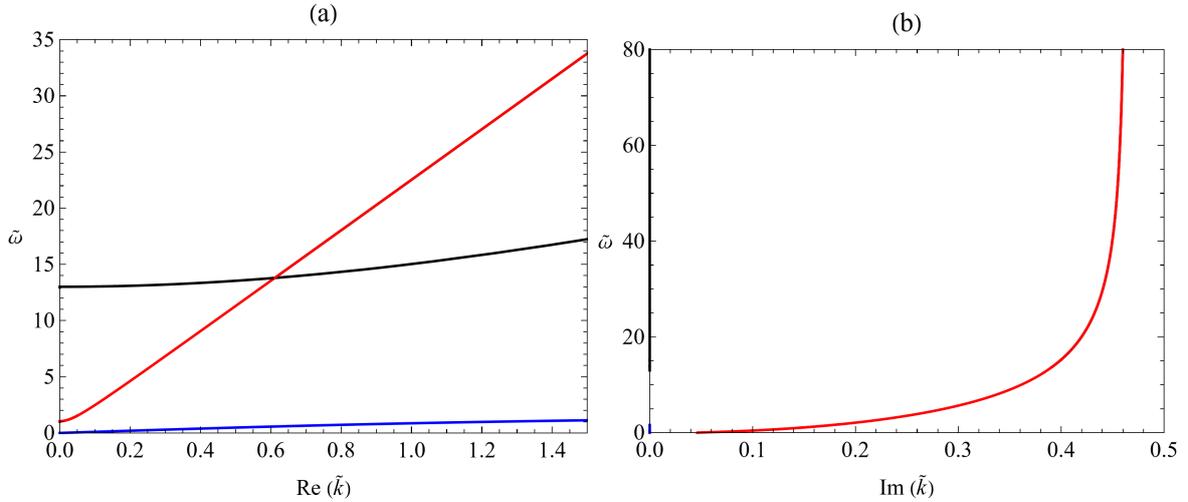


FIGURE 2 – Solutions de la relation de dispersion (30) : Branche gravitaire (courbe bleue), branche acoustique (courbe noire) et branche élastique (courbe rouge) obtenues avec les valeurs $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\rho_s = 3375 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_\ell = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\mu = 6.7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $\lambda = 8.2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $a = 1500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $h_0 = 4000 \text{ m}$ and $H = 220 \text{ km}$. (a) Pulsation en fonction du nombre d'onde dans le cas $\nu_e = 0$ (k est réel). (b) Pulsation en fonction de la partie imaginaire du nombre d'onde dans le cas $\nu_e = 5 \cdot 10^{10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

d'élasticité. Cette relation permet d'identifier trois branches, illustrées dans la figure 2(a) dans le cas $\nu_e = 0$. Le nombre d'onde et la pulsation apparaissent sous forme adimensionnée : $\tilde{k} = kh_0$, $\tilde{\omega} = \omega \sqrt{h_0/g}$. La première branche, représentée en bleu sur la figure 2(a), correspond aux ondes de gravité. La seconde (en noir) est la branche acoustique.

La troisième branche (en rouge) est due aux termes d'élasticité. La viscosité ν_e induit une atténuation de la branche élastique caractérisée par la partie imaginaire du nombre d'onde (voir figure 2(b)), et n'a aucune influence sur les deux autres branches. Sans

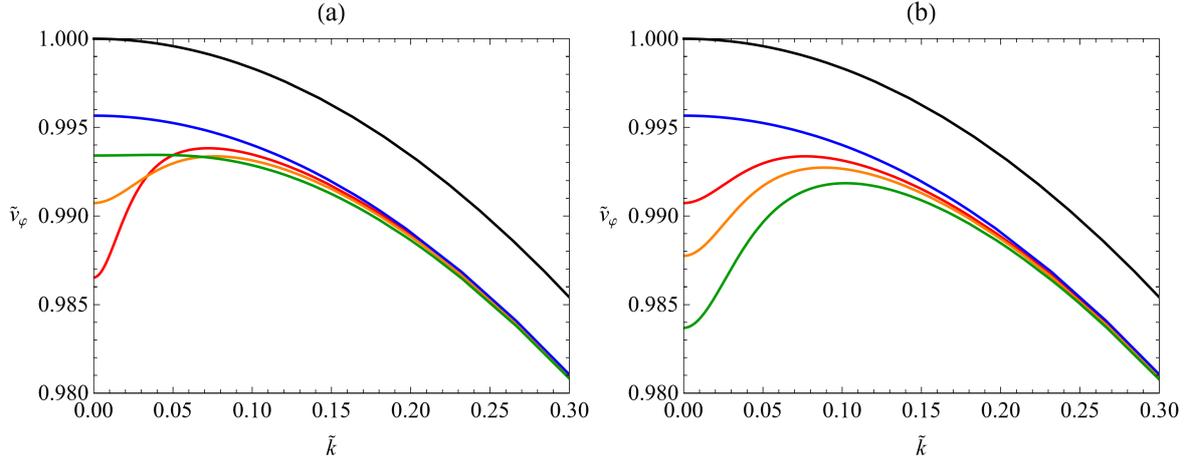


FIGURE 3 – Vitesse de phase de la branche gravitaire en fonction du nombre d’onde. En noir : incompressible avec fond rigide. En bleu : compressible avec fond rigide. Rouge, orange et vert : compressible avec avec effets élastiques. (a) Mêmes paramètres que pour la Figure 2 mais avec $H = 410$ km (courbe rouge), $H = 220$ km (courbe orange) et $H = 100$ km (courbe verte). (b) Même paramètres que pour la Figure 2 mais avec $\mu = 6.7 \cdot 10^{10}$ Pa et $\lambda = 8.2 \cdot 10^{10}$ Pa (courbe rouge), $\mu = 4.4 \cdot 10^{10}$ Pa et $\lambda = 4.6 \cdot 10^{10}$ Pa (courbe orange), $\mu = 2.7 \cdot 10^{10}$ Pa et $\lambda = 3.4 \cdot 10^{10}$ Pa (courbe verte).

surprise, on peut mettre en évidence que l’amplitude de la partie imaginaire associée à la branche élastique, et donc l’amortissement, augmente avec ν_e .

La vitesse de phase adimensionnée de la branche gravitaire est représentée dans la figure 3 en fonction du nombre d’onde adimensionné. Les courbes noires des Figures 3(a) et (b) représentent la vitesse de phase donnée par la théorie linéaire d’Airy des fluides incompressibles sur fond rigide :

$$\tilde{v}_\varphi = \sqrt{\frac{\tanh \tilde{k}}{\tilde{k}}} \quad (31)$$

Les courbes bleues dans les figures 3(a) et (b), obtenues aussi sur fond rigide, illustrent l’impact de la compressibilité. L’effet de l’élasticité peut être observé à travers les autres courbes en l’absence de viscosité ($\nu_e = 0$). La figure 3(a) permet d’observer l’effet du choix de la longueur de coupure H dans la couche solide, et la figure 3(b) illustre les résultats obtenus pour différentes calibrations des coefficients de Lamé. On peut observer en particulier que si H est assez grand, la vitesse de phase décroît si le nombre d’onde se situe en dessous d’une valeur critique. Ceci correspond à l’effet de dispersion inverse observé pour les tsunamis ([13]) : la vitesse diminue pour les tsunamis de longue période (au delà de 1000s). Dans les cas illustrés de la figure 3(a), le phénomène est observable pour des périodes allant de 1200 à 1600s, attestant de la capacité du modèle à capturer cet effet avec les bons ordres de grandeur.

III – 4 Soliton dans la limite ondes longues

On cherche des solutions du système (13)-(19) sous forme de solitons se propageant à vitesse constante c . On considère la situation d’équilibre

$$b = -\frac{\rho_l g H}{(\lambda + 2\mu)} \eta, \quad (32)$$

correspondant à la limite ondes longues $k \rightarrow 0$ dans (17) en l'absence de viscosité. Notons qu'alors, avec $\eta = h - h_0 + b$:

$$b = -\kappa(h - h_0) \quad , \quad \kappa = \left(1 + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_l g H}\right)^{-1}. \quad (33)$$

La recherche de solutions fonctions de la variable $\xi = x - ct$ permet d'identifier deux quantités constantes, obtenues via l'équation de la masse dérivée de (13),(19) :

$$m = hR(U - c), \quad (34)$$

et l'équation de quantité de mouvement (14), combinée à l'équation d'énergie (24) :

$$H = \frac{m^2}{2h^2 R^2} + \frac{2}{3}W^2 + gh + gb + \frac{P^2}{2a^2} + \frac{P}{R}. \quad (35)$$

En utilisant $R = \frac{e^{M^2} - 1}{M^2}$ et $M = \frac{\sqrt{gh}}{a^2}$, l'équation (16) donne :

$$\frac{dP}{d\xi} = -\frac{a^2}{m} \left(2W - \frac{m}{hR^2} e^{M^2} \frac{dh}{d\xi}\right). \quad (36)$$

Avec (36), la dérivation de (35) et (15) par rapport à ξ permet d'obtenir la solution via un système d'EDO du premier ordre :

$$\begin{aligned} \frac{dh}{d\xi} &= f(h, W, P) := \frac{2a^2 W}{mR} \left(\frac{1}{-\frac{m^2}{h^3 R^3} e^{M^2} + g(1 - \kappa) + \frac{a^2}{hR^3} e^{M^2} + \frac{P}{hR}} \right), \\ \frac{dP}{d\xi} &= \frac{2a^2}{m} W + \frac{a^2}{hR^2} e^{M^2} f(h, W, P), \\ \frac{dW}{d\xi} &= \frac{3}{2} \frac{P}{m}. \end{aligned} \quad (37)$$

En supposant que $U \rightarrow 0$, $W \rightarrow 0$, $P \rightarrow 0$ lorsque $\xi \rightarrow \pm\infty$, l'amplitude du soliton peut être obtenue en fonction de la hauteur d'eau au large notée h_∞ . Dans un souci de clarté, nous présentons ici le cas incompressible $R = 1$, $M = 0$ afin d'éviter les lourdeurs techniques associées au cas général. Notons qu'avec (33), l'équation de quantité de mouvement donne une troisième quantité constante :

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{m^2}{h} + hP + g(1 - \kappa) \frac{h^2}{2} \right] = 0, \quad (38)$$

qui, associée à (35), mène au système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{h} + hP + g(1 - \kappa) \frac{h^2}{2} &= \frac{m^2}{h_\infty} + g(1 - \kappa) \frac{h_\infty^2}{2}, \\ \frac{m^2}{2h^2} + gh - g\kappa(h - h_0) + P &= \frac{m^2}{2h_\infty^2} + gh_\infty. \end{aligned} \quad (39)$$

En multipliant par h la deuxième équation on peut éliminer la variable P pour obtenir :

$$\frac{m^2}{2h} - \frac{m^2}{h_\infty} \left(1 - \frac{h}{2h_\infty}\right) - \frac{1}{2}g(1 - \kappa)(h - h_\infty)^2 = 0. \quad (40)$$

Cette relation peut se réécrire en fonction de la hauteur d'eau adimensionnée $\hat{h} = h/h_\infty$ et d'un nombre de Froude relatif $F_\infty^2 = m^2/(gh_\infty^2)$:

$$(\hat{h} - 1)(\hat{h}^2 - (\nu + 1)\hat{h} + \nu) = 0, \quad (41)$$

où $\nu = F_\infty^2/(1 - \kappa)$. Exprimée en termes d'élévation de surface, la racine $\hat{h} = \nu$ donne :

$$\hat{\eta} = F_\infty^2 - 1 + \kappa. \quad (42)$$

A noter qu'on retombe sur l'amplitude du soliton des équations de Serre-Green-Naghdi si l'on néglige les termes élastiques ($\kappa = 1$).

III – 5 Résultats numériques

Sur un plan numérique, la partie liquide du modèle est traitée de manière similaire à [9], via une méthode de type splitting. Dans ce schéma, la partie acoustique (membre de droite des équations (16) et (15)) est traitée dans la phase implicite. Sur cette base, la partie viscoélastique du système est intégrée dans la partie explicite. Un solveur de Riemann de type Rusanov est utilisé pour la phase explicite. L'implicitation partielle du système permet de considérer $U \pm \sqrt{gh}$ comme vitesse d'interface dans la phase liquide, ce qui permet de réduire considérablement la diffusion numérique. La vitesse des ondes transverses c_s est prise en compte dans la viscosité de la partie élastique. Cette vitesse est plus grande que celle de l'onde acoustique, et contraint le pas de temps à travers la condition CFL standard $\Delta t \leq \Delta x/c_s$.

Nous proposons ici un cas test académique afin d'illustrer la capacité du modèle à reproduire les différents effets liés à l'élasticité avec le bon ordre de grandeur. On s'intéresse à la propagation d'un tsunami 1D se propageant dans un océan de profondeur au repos $h_0 = 4000$ m, initialisé à travers la condition suivante sur l'élévation de surface :

$$\eta(x, 0) = \frac{A}{2} \left[1 + \cos \left(\pi \frac{x - x_0}{\ell} \right) \right] \quad (43)$$

si $x_0 - \ell \leq x \leq x_0 + \ell$ et $\eta(x, 0) = 0$ sinon. La longueur du domaine de calcul est fixée à $L = 8000$ km. L'amplitude de la solution est $A = 10$ m et la largeur $\ell = 200$ km. Une zone de relaxation est utilisée aux extrémités du domaine pour absorber les ondes entrantes et sortantes. Les autres paramètres sont $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $H = 220$ km, $\rho_\ell = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_s = 3375 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\nu'_e = 5.0 \cdot 10^9 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. On considère la combinaison suivante pour les coefficients de Lamé : $\lambda = 8.2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$; $\mu = 6.7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$. La figure 4 permet d'observer l'évolution temporelle de l'élévation de surface relevée à $x = 7500$ km, pour différents choix de modèles. La modèle rigide incompressible (en noir) donne un temps d'arrivée de $t = 32\,824.9$ s pour l'amplitude maximale. La rajout de la compressibilité (courbe bleue) et de l'élasticité (courbe verte) retarde l'arrivée de la vague. L'utilisation du modèle complet (compressible élastique) permet de quantifier l'effet cumulé de ces deux phénomènes, occasionnant un délai de 217.3 s par rapport au modèle rigide incompressible, représentant 0.66 % du temps de propagation total. A noter que ce choix des coefficients de Lamé correspond à une configuration relativement rigide de la couche élastique. Ces effets se montrent généralement plus prononcés en explorant la gamme des coefficients physiquement admissibles, de sorte que l'ordre de grandeur du retard semble conforme aux observations.

La figure 4 permet aussi de mettre en évidence une légère phase négative de l'élévation de surface avant l'arrivée de la vague pour les modèles incluant l'élasticité (visible aux

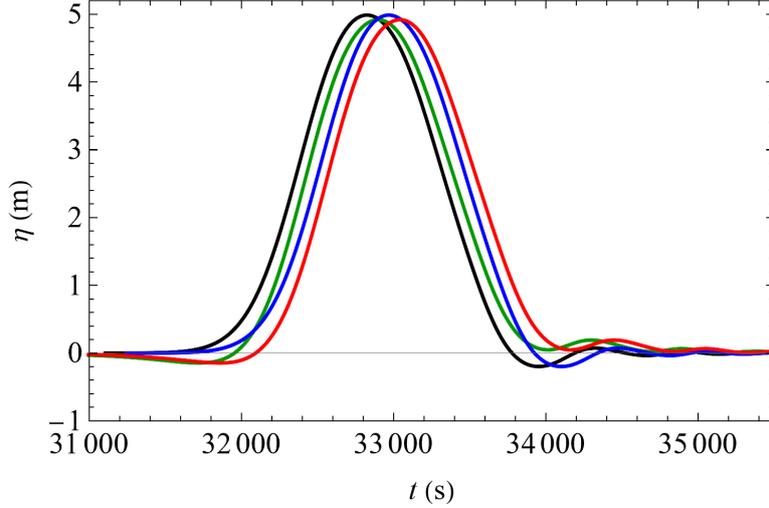


FIGURE 4 – Élévation de surface en fonction du temps relevée à $x = 7500$ km : Modèle incompressible, cas rigide (courbe noire) ; Modèle compressible, cas rigide (courbe bleue) ; Modèle incompressible avec élasticité (courbe verte) ; Modèle compressible avec élasticité (courbe rouge).

alentours de $t = 31\,800$ s sur les courbes rouge et verte). Ce phénomène, absent sur les modèles rigides, est la conséquence de l'effet de dispersion inverse mis en évidence dans la section §III – 3. Indiscernable lors des premières itérations, cet effet se développe au cours de la propagation sous l'influence de l'élasticité de la couche solide. A noter aussi que l'inclusion des termes élastiques entraîne une légère diminution de l'amplitude. Tous ces résultats sont conformes aux travaux et observations antérieurs, notamment [2, 13].

IV – Conclusions et perspectives

Nous avons présenté un nouveau modèle de propagation de tsunamis capable de prendre en compte l'élasticité du fond marin. L'approche couple un modèle dispersif compressible pour la couche liquide à un modèle de viscoélasticité linéaire intégré sur la profondeur de la couche solide. Il en résulte un système d'équations hyperbolique admettant une équation d'énergie exacte. Le système obtenu admet des solutions de type soliton dans la limite ondes longues. La relation de dispersion du modèle comprend une branche acoustique, une branche gravitaire et une branche élastique, généralisant ainsi les résultats obtenus dans [9] dans le cas rigide. L'étude de la branche élastique a notamment permis d'identifier l'effet de dispersion inverse, caractérisé par la diminution de la vitesse de phase en deçà d'une certaine valeur du nombre d'onde. La structure hyperbolique du modèle fournit un cadre adapté à la construction d'un schéma numérique, permettant de proposer une méthode simple et économique en coût de calcul. Les validations numériques ont permis de mettre en évidence les effets liés à l'élasticité, notamment leur impact sur le temps d'arrivée et l'effet de dispersion inverse, qui se manifeste à travers l'apparition d'une élévation négative de surface peu avant l'arrivée de la vague principale. Ces résultats attestent de la capacité du modèle à capturer les effets dûs à la compressibilité et l'élasticité avec les bons ordres de grandeur, en accord avec les observations de travaux précédents. L'exploitation de ce modèle dans des situations réalistes devra passer par son extension 2d sur fond variable, avec à terme l'inclusion des variations du potentiel de gravitation et la force de Coriolis en coordonnées sphériques.

Références

- [1] A. Abdolali, U. Kadri, and J. T. Kirby. Effect of water compressibility, sea-floor elasticity, and field gravitational potential on tsunami phase speed. *Sci. Rep.*, 9(1) :1–8, 2019.
- [2] S. Allgeyer and P. Cummins. Numerical tsunami simulation including elastic loading and seawater density stratification. *Geophys. Res. Lett.*, 41(7) :2368–2375, 2014.
- [3] T. Baba, S. Allgeyer, J. Hossen, P. R. Cummins, H. Tsushima, K. Imai, K. Yamashita, and T. Kato. Accurate numerical simulation of the far-field tsunami caused by the 2011 tohoku earthquake, including the effects of boussinesq dispersion, seawater density stratification, elastic loading, and gravitational potential change. *Ocean Model.*, 111 :46–54, 2017.
- [4] S. T. Grilli, J. C. Harris, T. S. T. Bakhsh, T. L. Masterlark, C. Kyriakopoulos, J. T. Kirby, and F. Shi. Numerical simulation of the 2011 tohoku tsunami based on a new transient fem co-seismic source : Comparison to far-and near-field observations. *Pure Appl. Geophys.*, 170(6) :1333–1359, 2013.
- [5] T.-C. Ho, K. Satake, and S. Watada. Improved phase corrections for transoceanic tsunami data in spatial and temporal source estimation : Application to the 2011 tohoku earthquake. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 122(12) :10–155, 2017.
- [6] T. Kato, Y. Terada, H. Nishimura, T. Nagai, and S. Koshimura. Tsunami records due to the 2010 chile earthquake observed by gps buoys established along the pacific coast of japan. *Earth, Planets and Space*, 63(6) :e5–e8, 2011.
- [7] J. T. Kirby, F. Shi, B. Tehranirad, J. C. Harris, and S. T. Grilli. Dispersive tsunami waves in the ocean : Model equations and sensitivity to dispersion and coriolis effects. *Ocean Model.*, 62 :39–55, 2013.
- [8] A. B. Rabinovich, P. L. Woodworth, and V. V. Titov. Deep-sea observations and modeling of the 2004 sumatra tsunami in drake passage. *Geophysical research letters*, 38(16), 2011.
- [9] G. L. Richard. An extension of the boussinesq-type models to weakly compressible flows. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 89 :217–240, 2021.
- [10] L. Tang, V. V. Titov, E. N. Bernard, Y. Wei, C. D. Chamberlin, J. C. Newman, H. O. Mofjeld, D. Arcas, M. C. Eble, C. Moore, et al. Direct energy estimation of the 2011 japan tsunami using deep-ocean pressure measurements. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 117(C8), 2012.
- [11] V. C. Tsai, J.-P. Ampuero, H. Kanamori, and D. J. Stevenson. Estimating the effect of earth elasticity and variable water density on tsunami speeds. *Geophys. Res. Lett.*, 40(3) :492–496, 2013.
- [12] J. Virieux. P-sv wave propagation in heterogeneous media : Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 51(4) :889–901, 1986.
- [13] S. Watada, S. Kusumoto, and K. Satake. Traveltime delay and initial phase reversal of distant tsunamis coupled with the self-gravitating elastic earth. *J. Geophys. Res. Sol. Ea.*, 119(5) :4287–4310, 2014.